И. Л. НИКОЛЬСКАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Допущено
Министерством приборостроения,
средств автоматизации и систем управления
в качестве учебника
для техникумов по специальности
«Прикладная математика»

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1981

ББК 22.12
Н64
УДК 517.11

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. Ф. А. Кабаков;
преподаватель Н. М. Плещенков

Никольская И. Л.

Н64 Математическая логика: Учебник. — М.: Высш. школа, 1981. — 127 с., ил.

25 к.

Книга предназначена для учащихся техникумов по специальности 1750 «Прикладная математика» и содержит теоретический материал, соответствующий программе курса «Математическая логика», а также упражнения для активного усвоения курса и приобретения необходимых навыков. Изложение базируется на знаниях по математике, полученных учащимися в восьмилетней школе, и на усвоенных ими языковых нормах.

Предназначается для учащихся средних специальных учебных заведений.

Н $\frac{20203-291}{001(01)-81}$ 222—81 1702060000

ББК 22.12
51

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга предназначена для учащихся техникумов по специальности «Прикладная математика». Ее содержание соответствует программе курса «Математическая логика», на изучение которого отводится 36 часов в начале первого года обучения.

Этот курс призван повысить общую культуру мышления учащихся и тем самым подготовить их к сознательному и глубокому усвоению математических дисциплин общего и специального циклов. Знакомство с языком математической логики и некоторыми ее методами поможет учащимся приобрести навыки правильного рассуждения, отчетливых формулировок, краткой и корректной записи математических предложений. В этом смысле курс является скорее «гуманитарным», нежели математическим, а его название «Математическая логика» — всего лишь дань традиции, согласно которой учебные, общеобразовательные курсы, излагающие азы, элементы какой-либо науки, именуются так же, как и сама эта наука.

В книге содержится необходимый минимум теоретических сведений и набор упражнений и задач для активного усвоения материала, закрепления и повторения. При изучении курса целесообразно не отделять изложение теории от практических занятий, а перемежать их в рамках одного урока.

Символика, используемая в книге, согласована с символикой действующих школьных учебников математики.

Считаю своим приятным долгом выразить признательность рецензентам канд. физ.-мат. наук, доц. Ф. А. Кабакову и преподавателю Н. М. Плещенкову, чьи замечания существенно способствовали улучшению книги.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Слово «логика» и производные от него часто можно встретить на страницах всевозможных печатных изданий и услышать в разговорной речи. Каков же смысл этого слова? Заглянем в толковый словарь С. И. Ожегова. Там сказано: «Логика — наука о законах мышления и его формах» и еще: «Логика — ход рассуждений, умозаключений». Слово «логика» происходит от греческого «логос», что, с одной стороны, означает «слово» или «речь», а с другой — то, что выражается в речи, т. е. мышление. Логика изучает лишь те акты мышления, которые фиксированы в языке в виде слов, предложений и их совокупностей. Таким образом, логика имеет непосредственное отношение к языку, речи. Поэтому логика соприкасается с грамматикой и, более широко, с лингвистикой (наукой о языке). С помощью логических средств наш естественный язык уточняется, приобретает четкость и определенность.

Логика как наука сформировалась очень давно — в IV в. до н. э. Ее создал древнегреческий ученый Аристотель. В течение многих веков логика почти совсем не развивалась. Это, конечно, свидетельствует о гениальности Аристотеля, которому удалось создать столь полную научную систему, что, казалось, «не убавить, не прибавить». Однако в силу такой неизменности логика приобрела славу мертвой, застывшей науки и вызывала у многих скептическое к себе отношение. Сухость и видимую бесплодность логики высмеивали Рабле, Свифт и др.

В XVII в. великий немецкий ученый Лейбниц задумал создать новую логику, которая была бы «искусством исчисления». В этой логике, по мысли Лейбница, каждому понятию соответствовал бы символ, а рассуждения имели бы вид вычислений. Эта идея Лейбница, не встретив понимания современников, не получила распространения и развития.

Только в середине XIX в. ирландский математик Дж. Буль частично воплотил в жизнь идею Лейбница. Им была создана алгебра логики, в которой действуют законы, схожие с законами обычной алгебры, но буквами обозначаются не числа, а предложения. На языке булевой алгебры можно описывать рассуждения и «вычислять» их результаты; однако ею охватываются далеко не всякие рассуждения, а лишь определенный тип их, в некотором смысле — простейший.

Алгебра логики Буля явилась зародышем новой науки — математической логики. В отличие от нее логику, восходящую к Аристотелю, называют традиционной формальной логикой. В названии «математическая логика» отражены две характерные черты этой науки: во-первых, математическая логика — это логика, использующая язык и методы математики; во-вторых, математическая логика была вызвана к жизни потребностями математики.

В конце XIX в. у математиков появилась надежда навести порядок в своей науке, которая так разрослась, что представители различных ее областей стали зачастую плохо понимать друг друга: созданная Г. Кантором теория множеств представлялась надежным фундаментом для построения единого и прочного математического здания. При попытках реализовать эту идею возникли трудности логического характера, которые оказалось невозможным преодолеть средствами традиционной формальной логики. Эти трудности окончательно не преодолены и по сей день, но попытки их преодоления дали мощный толчок становлению и развитию математической логики.

Математическая логика сама стала областью математики, поначалу казавшейся в высшей степени абстрактной и бесконечно далекой от практических приложений. Однако эта область недолго оставалась уделом «чистых» математиков. В начале нынешнего века П. С. Эренфест указал на возможность применения аппарата логики высказываний (раздела математической логики) в технике. В середине столетия была обнаружена теснейшая связь математической логики с новой наукой — кибернетикой. Эта связь открыла возможности многочисленных и разнообразных приложений математической логики. Достаточно сказать, что сегодня математическая логика используется в биологии, медицине, лингвистике, педагогике, психологии, экономике, технике. Чрезвычайно важна роль математической логики в развитии вычислительной техники: она используется в конструировании электронно-вычислительных машин (ЭВМ) и при разработке искусственных языков для общения с машинами.

Математическая логика уточнила и по-новому осветила понятия и методы традиционной формальной логики, существенно расширила ее возможности и сферу применимости.

Большой вклад в развитие математической логики сделали ученые разных стран: Г. Фреге (1848—1925), Д. Гильберт (1862—1943), Д. Пеано (1858—1932), Б. Рассел (1872—1970), К. Гёдель (род. в 1906 г.), П. С. Новиков (1901—1975), А. Н. Колмогоров (род. в 1903 г.), Я. Лукасевич (1878—1956), А. Тарский (род. в 1901 г.), А. Чёрч (род. в 1903 г.), А. Тьюринг (1912—1954), А. А. Марков (1903—1980), Н. А. Шанин (род. в 1919 г.) и др.

Предлагаемый курс вводит в круг некоторых основных понятий и методов математической логики путем знакомства с первым и фундаментальным ее разделом — логикой высказываний и отдельными вопросами из других разделов.

§ 1. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

1°. Высказывания и высказывательные формы. Высказывание — это предложение, которое либо истинно, либо ложно. Например, высказывание «Москва — столица СССР» является истинным, а высказывание «Волга впадает в Черное море» — ложным.

Не всякое предложение является высказыванием. Так, к высказываниям не относятся вопросительные и восклицательные предложения, поскольку говорить об их истинности или ложности нет смысла. Не являются высказываниями и такие предложения: «Каша — вкусное блюдо», «Математика — интересный предмет»; нет и не может быть единого мнения о том, истинны эти предложения или ложны. Предложение «Существуют инопланетные цивилизации» следует считать высказыванием, так как объективно оно либо истинное, либо ложное, хотя никто пока не знает, какое именно. Предложения «Шел снег», «Площадь комнаты равна 20 м^2», $a^2=4$ не являются высказываниями; для того чтобы имело смысл говорить об их истинности или ложности, нужны дополнительные сведения: когда и где шел снег, о какой конкретной комнате идет речь, какое число обозначено буквой a.

В последнем примере a может не обозначать конкретного числа, а быть *переменной*, т. е. буквой, вместо которой можно подставлять элементы некоторого множества, называемые *значениями переменной.* Пусть например, $\{-2; 0; 2, 3, 4\}$ — множество значений переменной a. Каждому значению переменной соответствует либо истинное, либо ложное высказывание; например, высказывания $(-2)^2=4$, $2^2=4$ истинны, а высказывания $0^2=4$, $3^2=4$, $4^2=4$ ложны.

Предложение, которое содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием при подстановке вместо всех переменных их значений, называют ***высказывательной формой.***

Рассмотрим предложения: «Он рыжеволос»; «Число делится на 7». Эти предложения не содержат переменных в явном виде, но тем не менее являются высказывательными формами: первое из них становится высказыванием (истинным или ложным) только после замены местоимения «он» именем конкретного человека из некоторого множества людей мужского пола; второе становится высказыванием, если на место слова «число» подставлять целые числа. Иначе эти предложения можно записать так: «Человек x рыжеволос», «Число y делится на 7».

Из высказывательных форм можно получать высказывания не только подстановкой вместо переменных их значений, но и с помощью специальных слов: «всякий» (а также его синонимов «любой», «каждый») и «существует» (а также выражений «некоторые», «по меньшей мере один»). Например, высказывание «Всякое число y делится на 7» — ложное; высказывание «Существует число y, которое делится на 7» — истинное.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Установите, какие из следующих предложений являются высказываниями; высказывательными формами; ни тем, ни другим: а) $3+2=5$; б) $3<2$; в) $3x<2$; г) $y^2\geqslant 0$; д) «Число слов в этом предложении равно семи»; е) «Осень — лучшая пора года»; ж) «Знаете ли вы украинскую ночь?»; з) «В четырехугольнике противоположные стороны конгруэнтны»; и) «Во всяком четырехугольнике противоположные стороны конгруэнтны»; к) «В некоторых четырехугольниках противоположные стороны конгруэнтны»; л) «Существует число x такое, что $x^2<0$»; м) «Для всякого числа x $|x|>0$»; н) «В городе N более 100 000 жителей»; о) «Существует наибольшее натуральное число»; п) $H_2O+SO_3=H_2SO_4$.

2. Укажите, какие из высказываний в упр. 1 истинные и какие — ложные.

3. В каждую высказывательную форму из упр. 1 подставьте значение переменной так, чтобы получилось: истинное высказывание; ложное высказывание.

4. Каждую высказывательную форму из упр. 1 превратите в истинное высказывание с помощью слова «всякий» или «существует».

5. Придумайте по два примера: а) истинного высказывания; б) ложного высказывания; в) высказывательной формы с числовыми переменными; г) высказывательной формы с нечисловыми переменными; д) предложения, не являющегося ни высказыванием, ни высказывательной формой.

2⁰. Элементарные и составные предложения. Из двух данных предложений можно образовать новые предложения с помощью союзов «и», «а», «или», «либо», «если... то...», «тогда и только тогда, когда» и др. С помощью частицы «не» или словосочетания «неверно, что» и из одного предложения можно получить новое.

Наиболее употребительными являются союзы «и», «или», «если... то», «тогда и только тогда, когда» (последние два особенно часто употребляются в математике). Каждый из остальных союзов либо близок по смыслу к какому-нибудь из указанных, либо может быть заменен их комбинацией с частицей «не». Так, например, союзы «а», «но» близки по смыслу союзу «и». Вместо того чтобы сказать: «Я пойду в театр, либо в кино», можно выразиться более длинно: «Я пойду в театр и не пойду в кино, или пойду в кино и не пойду в театр».

Союзы «и», «или», «если... то...», «тогда и только тогда, когда» и частицу «не» (словосочетание «неверно, что») будем называть *логическими связками.*

Предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок (или союзов, к ним сводящихся), называют *составными*. Предложения, не являющиеся составными, будем называть *элементарными.*

Так, например, из элементарных предложений «Я поеду в Ленинград» и «Ты поедешь в Киев» можно образовать следующие составные предложения: «Я поеду в Ленинград *и* ты поедешь в Киев»; «Я поеду в Ленинград *или* ты поедешь в Киев»; «*Если* я поеду в Ленинград, *то* ты поедешь в Киев»; «Я поеду в Ленинград *тогда и только тогда, когда* ты поедешь в Киев»; «Я *не* поеду в Ленинград»; «*Неверно, что* ты поедешь в Киев».

В грамматике различают предложения простые и сложные. Предложение, простое по своей грамматической структуре, может быть с точки зрения логики составным. Например, простое предложение «Противоположные стороны параллелограмма конгруэнтны и параллельны» считается в логике составным; оно образовано с помощью логической связки «и» из элементарных предложений «Противоположные стороны параллелограмма конгруэнтны» и «Противоположные стороны параллелограмма параллельны». Простое предложение «Завтра не будет осадков» по своей логической структуре не является элементарным; оно образовано из элементарного предложения «Завтра будут осадки» с помощью логической связки «не».

Можно ли утверждать, что составное предложение является высказыванием, если все составляющие его элементарные предложения — высказывания? Рассмотрим предложение «Число 2—простое или число 2—четное». Оно составлено из двух истинных высказываний. Однако решить вопрос об истинности или ложности этого предложения можно только после выяснения смысла, который имеет в данном случае союз «или». Если имеется в виду разделительный смысл этого союза (как, например, в предложении «Две прямые на плоскости параллельны или пересекаются»), то мы должны считать рассматриваемое предложение ложным; если же подразумевается неразделительный смысл «или» (как в предложении «На почте можно отправить посылку или подписаться на газету»), то данное предложение истинно.

В математической логике смысл логических связок уточняется так, чтобы вопрос об истинности или ложности составных предложений, образованных из высказываний, во всех случаях решался однозначно; в результате этого всякое предложение, составленное из высказываний с помощью логических связок, становится высказыванием. Таким уточнением мы и займемся в следующих пунктах этого параграфа.

УПРАЖНЕНИЯ

6. В данных составных предложениях выделите составляющие их элементарные предложения и логические связки: а) «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам;» б) «Я буду изучать немецкий или английский»; в) «Если телепатия существует, то некоторые физические законы требуют пересмотра»; г) «Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда все его углы конгруэнтны»; д) «Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2».

7. Из предложений «Солнце всходит на востоке» и «Солнце заходит на западе» составьте новые предложения с помощью всех логических связок.

3⁰. Конъюнкция и дизъюнкция. Пусть A и B — произвольные высказывания. Введем символ $\wedge$ для обозначения союза «и». Если, например, буквой A обозначено предложение «Завтра будет теплая погода», а буквой B — «Завтра не будет осадков», то выражение $A \wedge B$ соответствует предложению «Завтра будет теплая погода и (завтра) не будет осадков». Если завтра окажется, что погода холодная, либо идет дождь, либо одновременно идет дождь и холодно, то всякий, несомненно, признает такой прогноз ложным; истинным этот прогноз будет считаться только в том случае, если окажутся истинными и A и B.

Таким образом, предложение вида $A \wedge B$ естественно считать истинным в том и только в том случае, когда истинны оба предложения A и B. Соответствующее определение запишем в удобной и широко применяемой в математической логике форме **таблицы истинности**:

A	B	$A \wedge B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*л*

Буквы *и* и *л* — это сокращения слов «истина» и «ложь», которые в логике называются *значениями истинности* высказываний. В первых двух столбцах таблицы помещены всевозможные наборы значений истинности высказываний A и B, а в третьем столбце — соответствующие значения истинности составного предложения $A \wedge B$.

Логическую связку «или» будем обозначать символом $\vee$. Предложение вида $A \vee B$ (A или B) условимся считать ложным в том и только в том случае, когда оба предложения A и B ложны, т. е. примем следующее определение:

A	B	$A \vee B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*
л	*л*	*л*

Это определение закрепляет за союзом «или» неразделительный смысл, исключая другие его толкования*.

* В латыни союзу «или» в разделительном смысле соответствует слово aut, а «или» в неразделительном смысле — vel. Символ $\vee$ происходит от первой буквы слова vel.

В соответствии с данным определением предложение «Число 2 — четное или число 2—простое» является истинным высказыванием. Истинными высказываниями также являются предложения «Число 2— нечетное или простое» и «Число 2 — четное или составное». Предложение «Число 2— нечетное или составное», согласно принятому определению, ложно.

Очевидно, что всякое предложение, образованное из высказываний с помощью определенных таким образом логических связок «и» и «или», является высказыванием, поскольку оно либо истинно, либо ложно.

Образование составного высказывания с помощью логической связки называют *логической операцией*. Операция, соответствующая союзу «и», называется *конъюнкцией* (от латинского conjunctio — «соединение»); союзу «или» соответствует операция, называемая *дизъюнкцией* (disjunctio — «разделение»).

Заметим, что в арифметике операция и ее результат имеют разные названия — «сложение» и «сумма», «умножение» и «произведение»; логические операции и их результаты (составные предложения) называются одинаково.

Определения конъюнкции и дизъюнкции естественным образом обобщаются для любого числа составляющих высказываний:

конъюнкция n высказываний (т. е. предложение вида $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$) истинна тогда и только тогда, когда все составляющие ее высказывания истинны;

дизъюнкция n высказываний ($A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$) ложна тогда и только тогда, когда все составляющие ее высказывания ложны.

Легко видеть, что если хотя бы одно из составляющих предложений — высказывательная форма, а все остальные — высказывания, то составное предложение — высказывательная форма.

УПРАЖНЕНИЯ

8. Определите значения истинности следующих высказываний: а) «Париж расположен на Сене и $2+3=5$»; б) «1 — простое число и 2 — простое число»; в) «1 — простое число или 2 — простое число»; г) «Число 2 — четное или это число — простое»; д) $2 \leqslant 3$, $2 \geqslant 3$, $2 \cdot 2 \leqslant 4$, $2 \cdot 2 \geqslant 4$; е) «$2 \cdot 2 = 4$ или белые медведи живут в Африке»; ж) $2 \cdot 2 = 4$, и $2 \cdot 2 \leqslant 5$, и $2 \cdot 2 \geqslant 4$.

9. Определите значения истинности высказываний A, B, C и D,

если: а) $A \wedge (2\cdot 2 = 4)$ — истинное высказывание; б) $B \wedge (2\cdot 2 = 4)$ — ложное высказывание; в) $C \vee (2\cdot 2 = 5)$ — истинное высказывание; г) $D \vee (2\cdot 2=5)$ — ложное высказывание.

10. Изобразите на координатной плоскости множества точек, координаты которых обращают следующие высказывательные формы в истинные высказывания: а) $(x>0) \wedge (y>0)$; б) $(x>0) \wedge (y<0)$; в) $(x<0) \wedge (y\leqslant 0)$; г) $(x = 0) \wedge (y=0)$; д) $(x>0) \vee (y>0)$; е) $(x>0) \vee (y<0)$; ж) $(x<0) \vee (y=0)$; з) $(x=0) \vee (y=0)$.

11. Для каждой из данных высказывательных форм определите, может ли она стать: ложным высказыванием; истинным высказыванием: а) «Число n четно и число $n+1$ четно»; б) «Число n четно или число $n+1$ четно»; в) «Прямые a и b на плоскости параллельны или пересекаются»; г) «Прямые a и b в пространстве параллельны или пересекаются»; д) $\begin{cases} x>0, \\ x<0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x>1, \\ x<0; \end{cases}$ ж) $(x>0) \vee (x<0)$; з) «Треугольник ABC — прямоугольный или тупоугольный или остроугольный».

12. Каждое из следующих предложений замените конъюнкцией либо дизъюнкцией, имеющей тот же смысл: а) «Все однозначные простые числа, большие двух, нечетны»; б) «Каждое слагаемое суммы $a+b+c$ четно»; в) «По крайней мере одно из натуральных чисел n, $n-1$, $n+1$ четно»; г) «Число a принадлежит хотя бы одному из множеств A и B»; д) «Существует натуральное число, большее 118 и меньшее 123, которое делится на 7»; е) «Квадратное уравнение имеет не более двух корней».

13. Сформулируйте и запишите в виде конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого предложения (a и b — действительные числа): а) $ab\neq 0$; б) $ab = 0$; в) $a^2+b^2 = 0$; г) $a/b = 0$; д) $|a| = 2$; е) $|a|<2$; ж) $|a|>2$.

4°. Отрицание. Логическая операция, соответствующая логической связке «не» («неверно, что»), называется *отрицанием*. Отрицание предложения A записывается так*: $\bar{A}$. В отличие от конъюнкции и дизъюнкции операция отрицания производится над одним высказыванием и определяется таблицей из двух строк:

A	$\bar{A}$
и	л
л	и

Из этого определения следует, что предложение и его отрицание не могут быть ни одновременно истинны, ни одновременно ложны.

* Иногда отрицание предложения A обозначают $\neg A$ или $\sim A$.

Примеры. 1. «3 равно 2» (A); «3 не равно 2» ($\bar{A}$).

2. «Во всякий треугольник можно вписать окружность» (A); «Неверно, что во всякий треугольник можно вписать окружность» ($\bar{A}$).

В примере 1 отрицание ложного высказывания является истинным высказыванием, в примере 2 отрицание истинного высказывания является ложным высказыванием.

Если A — высказывательная форма, то $\bar{A}$ — также высказывательная форма. При одних и тех же наборах значений переменных высказывательные формы A и $\bar{A}$ становятся высказываниями с противоположными значениями истинности. Пусть, например, A — высказывательная форма $x^2=25$; тогда $\bar{A}$ — высказывательная форма $x^2\neq25$. При $x=5$ и $x=-5$ форма $x^2=25$ становится истинным высказыванием, а форма $x^2\neq25$ — ложным высказыванием. При всяком значении x, не равном 5 или -5, форма $x^2=25$ становится ложным высказыванием, а форма $x^2\neq25$ — истинным высказыванием.

Предложение, не содержащее формальных признаков отрицания (слов «не» или «неверно, что»), но имеющее тот же смысл, что и отрицание предложения A, будем также считать отрицанием A. Например, для предложения «Треугольник ABC — прямоугольный» отрицанием служит каждое из следующих предложений: «Треугольник ABC — не прямоугольный»; «Неверно, что треугольник ABC — прямоугольный»; «Треугольник ABC — косоугольный».

УПРАЖНЕНИЯ

14. Сформулируйте отрицания следующих высказываний; укажите значения истинности данных высказываний и их отрицаний: а) «Луна — спутник Марса»; б) «32 не делится на 4»; в) $5>2$; г) $3\leqslant5$; д) «Все простые числа нечетны».

15. Установите, какие из предложений в следующих парах являются отрицаниями друг друга и какие — нет (объясните, почему): а) $a<0$; $a>0$; б) $a<0$; $a\geqslant0$; в) «Треугольник ABC — прямоугольный»; «Треугольник ABC — остроугольный»; г) «Натуральное число n четно», «Натуральное число n нечетно»; д) «Функция f нечетна», «Функция f четна»; е) «Все простые числа нечетны», «Все простые числа четны»; ж) «Все простые числа нечетны», «Существует простое четное число»; з) «Человеку известны все виды животных, обитающих на Земле», «На Земле существует вид животных, не известный человеку»; и) «Существуют иррациональные числа», «Все числа — рациональные».

16. Следующие предложения запишите без знака отрицания: а) $\overline{a<b}$; б) $\overline{a\leqslant b}$; в) $\overline{a\geqslant b}$; г) $\overline{a>b}$.

17. Докажите или опровергните следующие утверждения, образовав отрицания: а) $2\geqslant 2$; б) $2\leqslant 3$; в) $3\geqslant 5$; г) «Всякое уравнение с одним неизвестным имеет действительный корень»; д) «Всякий четырехугольник с перпендикулярными диагоналями — ромб»; е) «Ни одно русское слово не содержит более двух одинаковых гласных подряд»; ж) «Всякое решение неравенства $x^2<0$ по модулю не превосходит 1».

5⁰. Импликация и эквиваленция. Логическая операция, соответствующая союзу «если... то...», называется *импликацией*. Будем обозначать эту операцию символом* $\rightarrow$. Запись $A\rightarrow B$ читается так: «если A, то B», либо «A имплицирует B».

Сравним такие предложения: «Если число n делится на 4, то оно делится на 2»; «Если Иванов увлечен математикой, то Петров ничем, кроме хоккея, не интересуется». Очевидно, что смысл союза «если... то...» в этих предложениях не один и тот же. Определение импликации, представленное таблицей

A	B	$A\rightarrow B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*и*
л	*л*	*и*

соответствует смыслу союза «если... то...» в первом предложении. В самом деле, признавая справедливость утверждения «Если число n делится на 4, то оно делится на 2» для любого натурального n, мы обязаны считать истинными такие высказывания, как «Если 16 делится на 4, то 16 делится на 2», «Если 18 делится на 4, то 18 делится на 2» и «Если 17 делится на 4, то 17 делится на 2», что соответствует первой, третьей и четвертой строкам таблицы. Ложного высказывания, соответствующего второй строке таблицы, в силу справедливости исходного утверждения мы не получим ни при каком значении n.

В импликации $A\rightarrow B$ первый член A называется *антецедентом* (от латинского antecedens — «предшествую-

* Иногда импликацию обозначают символом $\Rightarrow$ или $\supset$.

щий»), а второй член B — *консеквентом* (consequens — «последующий»).

Из определения импликации следует, что: 1) *импликация с ложным антецедентом всегда истинна;* 2) *импликация с истинным консеквентом всегда истинна;* 3) *импликация ложна тогда и только тогда, когда ее антецедент — истинный, а консеквент — ложный.*

Принятое определение импликации соответствует употреблению союза «если...то...» не только в математике, но и в обыденной, повседневной речи. Так, например, обещание приятеля «Если будет хорошая погода, то я приду к тебе в гости» вы расцените как ложь в том и только в том случае, когда погода будет хорошая, а приятель к вам не придет.

Вместе с тем определение импликации вынуждает считать истинными высказываниями такие предложения, как «Если $2\cdot2=4$, то Москва — столица СССР» или «Если $2\cdot2=5$, то существуют ведьмы». Эти предложения, вероятно, кажутся бессмысленными. Дело в том, что мы привыкли соединять союзом «если... то» (так же как и другими союзами) предложения, связанные по смыслу. Но определениями логических операций смысл составляющих высказываний никак не учитывается; они рассматриваются как объекты, обладающие единственным свойством — быть истинными либо ложными. Поэтому не следует смущаться «бессмысленностью» некоторых составных высказываний; их смысл не входит в предмет нашего рассмотрения.

Логическая операция, соответствующая союзу «тогда и только тогда, когда», называется *эквиваленцией.* Введем для обозначения эквиваленции символ* $\leftrightarrow$. Запись $A \leftrightarrow B$ читается как «А тогда и только тогда, когда B».

Когда мы говорим «A тогда и только тогда, когда B», то имеем в виду, что оба предложения A и B одновременно истинны, либо одновременно ложны. Например, говоря «Я поеду в Ленинград тогда и только тогда, когда ты поедешь в Киев», мы утверждаем, что либо произойдет и то, и другое, либо не произойдет ни того, ни другого. В соответствии с обычным пониманием союза «тогда и только тогда, когда» примем определение:

---

* Иногда эквиваленцию обозначают символом $<=>$.

A	B	$A\leftrightarrow B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*и*

Таким образом, высказывание вида $A \leftrightarrow B$ истинно, если значения истинности высказываний A и B совпадают, и ложно в противном случае.

Примеры. 1. $\sin 30^\circ = 1/2 \leftrightarrow (2\cdot 2=4)$ — истинное высказывание.

2. $\sin 30^\circ = 1/2 \leftrightarrow (2\cdot 2=5)$ — ложное высказывание.

3. $\sin 30^\circ = 1 \leftrightarrow (2\cdot 2=4)$ — ложное высказывание.

4. $\sin 30^\circ = 1 \leftrightarrow (2\cdot 2=5)$ — истинное высказывание.

5. Высказывательная форма $(x=1) \leftrightarrow (y=3)$ становится истинным высказыванием, когда $x=1$ и $y=3$ либо $x\neq 1$ и $y\neq 3$; если же $x=1$ и $y\neq 3$ либо $x\neq 1$ и $y=3$, то данная форма становится ложным высказыванием.

УПРАЖНЕНИЯ

18. Определите значения истинности следующих высказываний: а) «Если 12 делится на 6, то 12 делится на 3»; б) «Если 11 делится на 6, то 11 делится на 3»; в) «Если 15 делится на 6, то 15 делится на 3»; г) «Если 15 делится на 3, то 15 делится на 6»; д) «Если Париж расположен на Темзе, то белые медведи обитают в Африке»; е) «12 делится на 6 тогда и только тогда, когда 12 делится на 3»; ж) «11 делится на 6 тогда и только тогда, когда 11 делится на 3»; з) «15 делится на 6 тогда и только тогда, когда 15 делится на 3»; и) «15 делится на 5 тогда и только тогда, когда 15 делится на 4»; к) «Солнце всходит на востоке тогда и только тогда, когда оно заходит на западе».

19. Пусть через A обозначено высказывание «9 делится на 3», а через B — высказывание «10 делится на 3». Определите значения истинности следующих высказываний: а) $A\to B$; б) $B\to A$; в) $\overline{A}\to B$; г) $\overline{B}\to A$; д) $\overline{A}\to\overline{B}$; е) $\overline{B}\to\overline{A}$; ж) $A\to\overline{B}$; з) $B\to\overline{A}$; и) $A\leftrightarrow B$; к) $\overline{A}\leftrightarrow\overline{B}$; л) $\overline{A}\leftrightarrow B$; м) $A\leftrightarrow\overline{B}$.

20. Определите значения истинности высказываний A, B, C и D в следующих предложениях, первые два из которых истинны, а последние два — ложны: а) «Если 4 — четное число, то A»; б) «Если B, то 4 — нечетное число»; в) «Если 4 — четное число, то C»; г) «Если D, то 4 — нечетное число».

21. Определите значения истинности высказываний A, B, C, D в следующих предложениях, первые два из которых истинны, а последние два — ложны: а) $A\leftrightarrow(2<3)$; б) $B\leftrightarrow(2>3)$; в) $C\leftrightarrow(2<3)$; г) $D\leftrightarrow(2>3)$.

22. Придумайте по два примера: а) истинной импликации с истинным антецедентом; б) истинной импликации с ложным консеквентом; в) ложной импликации; г) истинной эквиваленции; д) ложной эквиваленции.

23. Определите, может ли данная высказывательная форма стать ложным высказыванием: а) «Если последняя цифра в записи натурального числа n есть нуль, то число n кратно 5»; б) «Если x — брат y, то x и y — родственники»; в) «Если x — брат y, то y — брат x»; г) «x — дочь y тогда и только тогда, когда y — мать x»; д) «Число n кратно 2 тогда и только тогда, когда число n^2 четно»; е) «x старше y тогда и только тогда, когда y моложе x».

24. Найдется ли такой день недели, когда: а) утверждение «Если сегодня понедельник, то завтра пятница» истинно; б) утверждение «Если сегодня понедельник, то завтра вторник» ложно?

25. На столе лежат 4 карточки: $\boxed{A}$, $\boxed{Б}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$. На каждой карточке с одной стороны написана буква, а с другой — число. Какие карточки нужно перевернуть, чтобы доказать или опровергнуть утверждение: «Если на одной стороне карточки гласная, то на обороте — четное число»?

26. Сформулируйте в виде импликаций следующие предложения: а) «Во всяком треугольнике сумма величин внутренних углов равна 180°»; б) «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны»; в) «Во вписанном четырехугольнике суммы величин противоположных углов равны»; г) «Во всякий треугольник можно вписать окружность»; д) «В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов»; е) «Всякий элемент множества A принадлежит множеству B».

27. С помощью определения импликации и определения подмножества докажите, что пустое множество есть подмножество любого множества.

§ 2. ЯЗЫК ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1°. Формулы логики высказываний. Одним из основных и в некотором смысле простейшим разделом математической логики является логика высказываний. Элементарные высказывания рассматриваются в ней как нерасчленяемые «атомы», а составные высказывания — как «молекулы», образованные из «атомов» применением к ним логических операций. Логика высказываний интересуется единственным свойством элементарных высказываний — их значением истинности; составные же высказывания изучаются ею со стороны их структуры, отражающей способ, которым они образованы. Структура составных высказываний определяет зависимость их значений истинности от значений истинности составляющих элементарных высказываний.

Пусть X, Y и Z — переменные, вместо которых можно подставлять любые элементарные высказывания (или их значения истинности); такие переменные будем называть *высказывательными* (или истинностными) *переменными*. С помощью высказывательных переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, т. е. заменить формулой, выражающей его логическую структуру. Например, высказывание «Если 100 делится на 2 и на 5, то 100 делится на 10» формализуется в виде $(X \wedge Y) \rightarrow Z$; такая же формула соответствует предложению «Если в четырехугольнике две противоположные стороны конгруэнтны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм».

Уточним понятие «формула логики высказываний». Для этого сначала зададим *алфавит*, т. е. набор символов, которые мы будем употреблять в логике высказываний:

1) X, Y, Z, X_i, Y_i, Z_i (i — натуральное число) — символы для обозначения высказывательных переменных;

2) *и*, *л* — символы, обозначающие логические константы «истина» и «ложь»;

3) $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $^{-}$ — символы логических операций;

4) (,) — скобки (вспомогательные символы, служащие для указания порядка выполнения операций).

Дадим теперь строгое определение формулы логики высказываний:

1. *Всякая высказывательная переменная — формула**.

2. *Символы и, л — формулы.*

3. *Если* F *— формула, то* $\overline{F}$ *— формула.*

4. *Если* F_1 *и* F_2 *— формулы, то* $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ *— формулы.*

5. *Никаких других формул в логике высказываний нет.*

В п. 1 и 2 определены элементарные формулы; в п. 3 и 4 даны правила образования из любых данных формул новых.

Определения такого типа называются индуктивными определениями. Во всяком индуктивном определении имеются прямые пункты (в данном случае п. 1—4) и косвенный пункт (в данном случае п. 5). В прямых пунктах задаются объекты, которые в дальнейшем именуются определяемым термином (в данном случае *формулами логики высказываний*). В косвенном

---

* В тех случаях, когда не может возникнуть недоразумения, мы вместо «формула логики высказываний» будем говорить просто «формула».

пункте говорится, что такие объекты исчерпываются заданными в прямых пунктах.

Среди прямых пунктов имеются б а з и с н ы е п у н к т ы (в данном случае п. 1 и 2) и и н д у к т и в н ы е п у н к т ы (в данном случае п. 3 и 4). В базисных пунктах прямо указываются некоторые объекты, которые в дальнейшем именуются определяемым термином. В индуктивных пунктах даются правила получения из любых объектов, определенных в базисных пунктах, новых объектов, которые также будут именоваться этим термином.

Условимся для упрощения записей не заключать в скобки формулы, не являющиеся частями других формул или стоящие под знаком отрицания. Заметим, что в формуле число левых скобок всегда должно быть равно числу правых скобок.

Опишем п р о ц е д у р у ф о р м а л и з а ц и и в ы с к а з ы в а н и й:

1. *Если высказывание — простое, то ему ставится в соответствие элементарная формула.*

2. *Если высказывание — составное, то для составления соответствующей формулы нужно: а) выделить все элементарные высказывания и логические связки, образующие данное составное высказывание; б) заменить их соответствующими символами* (различные* элементарные высказывания обозначаются различными символами); *в) расставить скобки в соответствии со смыслом данного высказывания.*

Подобным образом формализуются и высказывательные формы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определите, какие из следующих выражений являются формулами логики высказываний, и выпишите эти формулы: X; x; X_5; F; X_i; F_1; u; a; $Y \wedge Z$; $X \vee л$; $Y \vee Y$; $\overline{X}$; $\overline{X \wedge Y}$; $\overline{X} \vee \overline{Y}$; $\overline{X \vee Y}$; $X \rightarrow Y$ $(X \wedge Y) \vee Z$; $X \wedge (Y \vee Z)$; $X \wedge Y \vee Z$; $X \rightarrow (Y \wedge Z)$; $(X \wedge Y) \leftrightarrow (Z \vee X_1)$ $(X \wedge Y) \leftrightarrow Z) \vee X_3$; $X \vee u$; $X \wedge л$.

2. Выпишите все формулы, входящие в формулу $\overline{X \wedge Y} \rightarrow ((Z \vee \overline{X}) \leftrightarrow Y)$.

3. Формализуйте следующие предложения**: а) «2 — простое

---

* Здесь слово «различные» употреблено не в смысле логики высказываний, где считаются неразличимыми все истинные и отдельно все ложные высказывания, а в житейском, неуточненном, но интуитивно ясном смысле. В этом смысле каждый, очевидно, сочтет высказывания «2·2 = 4» и «Луна — спутник Земли» различными, а высказывания «2 — простое четное число» и «2 — четное простое число» — одинаковыми.

** Здесь и далее под предложением будем подразумевать высказывание или высказывательную форму.

число и 3 — простое число»; б) «Ломоносов — великий ученый и талантливый поэт»: в) «Число n делится на 2 или на 3»; г) «Высказывание A истинно или ложно»»; д) «Скрещивающиеся прямые не лежат в одной плоскости»; е) «Неверно, что две стороны трапеции конгруэнтны и параллельны»; ж) «Две стороны трапеции не конгруэнтны или не параллельны»; з) «Неверно, что 100 делится на 3 и на 7»; и) «100 не делится ни на 3, ни на 7»; к) «Если число четно и больше двух, то оно равно сумме двух простых чисел»; л) «Если $x \in M \cap N$, то $x \in M$ и $x \in N$»; м) «Я сделаю зарядку и, если будет хорошая погода, поеду за город»; н) «Если $c > a$, $c > b$ и $c^2 \neq a^2 + b^2$, то неверно, что треугольник со сторонами a, b, c — прямоугольный»; о) «Четырехугольник является квадратом тогда и только тогда, когда все его стороны и все углы конгруэнтны»; п) «Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда они не имеют общих точек или совпадают»; р) «Если $x^2 - 5x + 6 = 0$, то $x = 2$, $x = 3$»; с) «$|x| < 2$, откуда $x > -2$, $x < 2$»; т) «$|x| > 2$, откуда $x > 2$, $x < -2$». (В трех последних предложениях нужно выявить подразумеваемые логические связки.)

4. Для каждой формулы придумайте два формализуемых ею предложения: а) $\overline{X \to Y}$; б) $\overline{X} \to (Y \vee Z)$; в) $\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\overline{X}_1 \vee \overline{Y}_1)$; г) $\overline{X \vee Y} \leftrightarrow (\overline{X} \wedge \overline{Y})$.

5. Для каждой ли формулы из упр. 4 можно придумать ложное высказывание, ею формализуемое?

2⁰. Язык и метаязык. Формализацию предложений можно рассматривать как перевод с естественного языка на специальный, искусственно созданный язык логики. Конечно, перевод на язык логики существенно отличается от перевода, скажем, с русского на английский. При переводе с одного естественного языка на другой мы, как правило, тщательно заботимся о сохранении смысла переводимого текста; структура же предложений может при этом меняться. При переводе на язык логики первоначальный смысл предложений не воспроизводится, а, напротив, почти полностью игнорируется; зато их структура (в описанном выше смысле) сохраняется и становится явной, четко и однозначно выраженной.

Существует много искусственных языков различного назначения. Например, созданы различные алгоритмические и машинные языки для общения с ЭВМ. Искусственный язык нужен там, где многозначность, присущая обычным языкам и приводящая к неточностям и неясностям, недопустима. Так обстоит дело при общении с машиной, которая не может выбрать из нескольких значений слова нужное с помощью здравого смысла и интуиции. Многозначность слов и выражений естественного языка несовместима с точностью и надежностью логического анализа.

Искусственные языки, создаваемые для нужд логики, называют *формализованными языками*. Формализованный язык строится следующим образом: сначала задается *алфавит* языка, т. е. исходные символы, которые будут в нем употребляться; каждая последовательность исходных символов называется *словом*; затем вводится *синтаксис*, т. е. набор правил, выделяющих из всех слов формализованного языка слова, называемые *формулами*.

Таким формализованным языком является, в частности, язык логики высказываний.

Всякий формализованный язык обычно строится так, чтобы для любого его слова можно было определить, является ли оно формулой этого языка. Так, в формализованном языке логики высказываний всегда можно отличить формулу от сочетания символов, не являющегося формулой.

В определении формулы логики высказываний мы употребляли слова русского языка, а также символы F, F_1, F_2, не входящие в алфавит языка логики высказываний, т. е. говорили о создаваемом формализованном языке на другом, обычном, неформализованном языке.

Когда о каком-либо языке L_1 говорят на другом языке L_2, то L_2 по отношению к L_1 называется *метаязыком*, а L_1 по отношению к L_2 — *языком-объектом*. Так, например, в учебнике английского языка, написанном на русском языке, английский — это язык-объект, а русский — метаязык. Символы F, F_1, F_2 и слова русского языка в определении формулы логики высказываний — это метаязыковые объекты по отношению к языку логики высказываний.

Иногда слова языка-объекта и метаязыка черпаются из одного и того же источника. Так обстоит дело, например, в учебнике русского языка, написанном на русском же языке, или в толковом словаре. Там, где возможна путаница, слова в их метаязыковом значении (или, наоборот, слова языка-объекта) каким-нибудь образом выделяются. В толковом словаре, например, слова, значения которых разъясняются, набираются жирным шрифтом или курсивом.

В логике такое различение слов языка-объекта и метаязыка необходимо. Сравните два умозаключения:

1) Боря — шахматист.
Боря учится только на пятерки.

2) Боря — шахматист.
Боря — слово из четырех букв.

Следовательно, Боря — шахматист и отличник.	**Следовательно, Боря — шахматист и слово из четырех букв.**

На первый взгляд эти умозаключения совершенно одинаковы по форме; однако первое, несомненно, правильное, а второе приводит к абсурдному выводу. Дело здесь в том, что в предложении «Боря — слово из четырех букв» слова неравноправны: первое принадлежит языку-объекту, а все остальные — метаязыку. Если отметить это обстоятельство, выделив слово «Боря» (например, заключив его в кавычки), то неправомерность вывода станет очевидной.

С неразличением языка-объекта и метаязыка связан ряд парадоксов, занимающих умы логиков, математиков, философов с античных времен до наших дней. Приведем один из таких парадоксов.

Спрашивается, истинно или ложно следующее предложение, помещенное в рамке:

Предложение, записанное здесь, ложно.

Если предположить, что это предложение истинно, то надо признать его ложность, и наоборот.

Мы не будем вдаваться в детальное объяснение этого парадокса, тем более что единого и бесспорного мнения на этот счет не существует до сих пор. Отметим только, что, оценивая предложение в рамке как истинное или ложное, мы говорим на метаязыке по отношению к языку, из слов которого это предложение составлено и который выступает в данном случае как язык-объект. Между тем слово «ложно» вне рамки ничем не отличается от слова «ложно» внутри нее, т. е. происходит смешение языка-объекта и метаязыка. Это и приводит, по-видимому, к возникновению противоречия.

При построении формализованных языков, как это можно видеть на примере языка логики высказываний, возможность смешивания языка-объекта и метаязыка исключается.

Метаязык, описывающий какой-либо искусственный язык, сам может быть искусственным, однако другим, отличным от языка-объекта, языком. Таков, например, искусственный язык Бэкуса, описывающий правила построения фраз (синтаксис) универсального языка программирования АЛГОЛ. Смысл фраз (семантика) языка АЛГОЛ описывается на обычном, естественном языке.

УПРАЖНЕНИЯ

6. В следующих предложениях укажите слова языка логики высказываний: а) «Если F_1 — формула $\overline{X \wedge Y}$, а F_2 — формула $\overline{X} \vee \overline{Y}$; то из F_1 и F_2 можно образовать формулу $\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\overline{X} \vee \vee \overline{Y})$»; б) «Импликация $X \to Y$ ложна тогда и только тогда, когда X истинно, а Y ложно»; в) «Импликации $л \to Y$ и $Y \to и$ истинны при любом значении Y».

7. Определите, какие слова в следующих предложениях принадлежат метаязыку и какие — языку-объекту. Выражения, принадлежащие языку-объекту, подчеркните: а) «Предложение «2 — простое число и 2 — четное число» — сложносочиненное»; б) «Хлеб — имя существительное»; в) «Peace — слово английского языка»; г) «Название монеты «копейка» происходит от слова «копье»; д) «Предложение $ax^2+bx+c=0$ принадлежит символическому языку математики»; е) «Уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет не более двух корней»; ж) «Истина» по-английски — true, а «ложь» — false»; з) «True и false — слова языка АЛГОЛ».

3⁰. Составление таблиц истинности для данных формул. Пусть F — некоторая формула логики высказываний. Если каждой переменной, входящей в эту формулу, приписать одно из значений истинности (*и* либо *л*), то, пользуясь определениями логических операций, можно найти значение формулы F при данном наборе значений ее переменных.

Например, формула $(X \wedge Y) \to Z$ при значениях *и* для переменных X и Y и *л* для переменной Z имеет значение *л*, а при любых других наборах значений переменных — значение *и* (проверьте!).

Удобной формой записи при нахождении значений формулы, соответствующих всевозможным наборам значений ее переменных, является таблица.

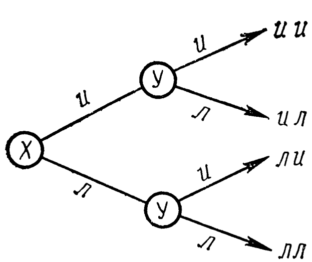

Рис. 1

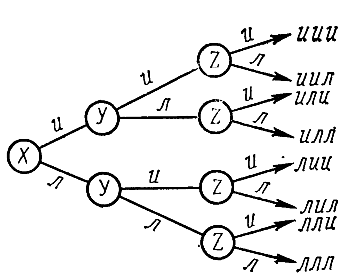

Рис. 2

Составим такую таблицу для формулы $(\overline{X} \vee Y) \rightarrow \overline{Y}$, которая содержит две переменные X и Y. В первых двух столбцах таблицы выпишем всевозможные пары значений этих переменных; таких пар — четыре (рис. 1). В последующие столбцы запишем значения формул $\overline{X}$, $\overline{X} \vee Y$, $\overline{Y}$ и $(\overline{X} \vee Y) \rightarrow \overline{Y}$ согласно определениям операций. В результате получим таблицу:

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{X} \vee Y$	$\overline{Y}$	$(\overline{X} \vee Y) \rightarrow \overline{Y}$
и	*и*	*л*	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*и*	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*

Первые два и последний столбец этой таблицы выражают соответствие между всевозможными наборами значений переменных и значениями формулы. Эти столбцы составляют таблицу истинности данной формулы.

Составим теперь таблицу истинности для формулы $(X \wedge \overline{Y}) \leftrightarrow (Z \rightarrow X)$. Эта формула содержит три переменные, для которых имеется ровно 8 различных наборов значений истинности (рис. 2). Таблица истинности для указанной формулы вместе с промежуточными результатами выглядит так:

X	Y	Z	$\overline{Y}$	$X \wedge \overline{Y}$	$Z \rightarrow X$	$(X \wedge \overline{Y}) \leftrightarrow (Z \rightarrow X)$
и	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*	*л*
и	*и*	*л*	*л*	*л*	*и*	*л*
и	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*
л	*и*	*и*	*л*	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*л*	*л*	*л*	*и*	*л*
л	*л*	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*
л	*л*	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*

Очевидно, что таблица истинности для формулы с четырьмя переменными содержит 16 строк и вообще для формулы с n переменными она содержит 2^n строк.

Часто бывает нужно сравнить таблицы истинности различных формул; для удобства такого сравнения принят стандартный порядок заполнения первых n столбцов, а именно: переменные, озаглавливающие столбцы, располагаются слева направо в алфавитном порядке либо в порядке возрастания индексов; верхняя половина первого (крайнего левого) столбца заполняется буквами *и*, нижняя — буквами *л*; верхняя четверть второго столбца заполняется буквами *и*, следующая за ней — буквами *л*, третья четверть — буквами *и* и последняя — буквами *л*; аналогично заполняются остальные столбцы, причем период чередования букв *и* и *л* в каждом столбце вдвое меньший, чем в предыдущем; в n-м столбце буквы *и* и *л* чередуются построчно.

Иногда процесс составления таблицы истинности для данной формулы можно без ущерба для дела несколько сократить. Как это делается, покажем на примере формулы $(X \vee Y) \to (Z \wedge \overline{X})$.

Запишем данную формулу в верхнюю строку таблицы и под буквами X, Y и Z выпишем всевозможные наборы их значений. Затем столбец под формулой $\overline{X}$ заполним ее значениями. Далее, заполним столбцы под символами $\vee$ и $\wedge$ соответственно значениями формул $X \vee Y$ и $Z \wedge \overline{X}$. Наконец, заполним столбец под символом $\to$ значениями заданной формулы. В результате получим таблицу:

$(X$	$\vee$	$Y)$	$\to$	$(Z$	$\wedge$	$\overline{X})$
и	*и*	*и*	*л*	*и*	*л*	*л*
и	*и*	*и*	*л*	*л*	*л*	*л*
и	*и*	*л*	*л*	*и*	*л*	*л*
и	*и*	*л*	*л*	*л*	*л*	*л*
л	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*
л	*и*	*и*	*л*	*л*	*л*	*и*
л	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*
л	*л*	*л*	*и*	*л*	*л*	*и*

При составлении таблицы надо следить за тем, чтобы не перепутать порядок действий; заполняя столбцы, следует двигаться «изнутри наружу», т. е. от элементарных формул к более и более сложным; столбец, заполняемый последним, содержит значения исходной формулы.

УПРАЖНЕНИЯ

8. Составьте таблицы истинности для формул: а) $(\overline{X}\to Y)\vee\vee\overline{X\wedge Y}$; б) $\overline{X\vee Y}\to(X\leftrightarrow\overline{Z})$; в) $((X_1\to X_2)\to X_3)\wedge(X_4\leftrightarrow X_1)$; г) $(X\wedge Y)\to(X\vee Y)$; д) $((X\to Y)\wedge(Y\to Z))\to(X\to Z)$.

9. Буквами X и Y обозначены соответственно предложения «Число n четно» и «Число n делится на 3». а) Формализуйте предложение P: «Неверно, что число n нечетно и не делится на 3»; б) составьте для полученной формулы таблицу истинности; в) сформулируйте условия, при которых предложение P истинно; г) подберите более простую формулу с такой же таблицей истинности; д) выразите мысль, заключенную в предложении P, в более простой форме.

10. Выполните задания из предыдущего упражнения для предложения Q: «Неверно, что число n нечетно или не делится на 3».

4⁰. Тавтологии. Когда мы оцениваем предложение как истинное либо как ложное, то при этом обычно имеем в виду соответствие или несоответствие его содержания действительности. Так, например, утверждение «А. С. Пушкин родился в 1799 году» соответствует действительности и, следовательно, истинно. Заглянув в календарь, легко убедиться, что предложение «11 апреля 1977 года было воскресенье» ложно.

Однако для того чтобы установить, истинно или ложно предложение «Треугольник ABC — прямоугольный или косоугольный», нам не нужно выяснять, о каком именно треугольнике идет речь, и измерять его углы; очевидно, что это предложение заведомо истинно.

Формула $X\vee\overline{X}$, соответствующая этому предложению, принимает значение *и* при каждом из двух значений истинности переменной X. Формулы $(X\wedge Y)\to\to(X\vee Y)$ и $((X\to Y)\wedge(Y\to Z))\to(X\to Z)$ (см. упр. 8) принимают значение *и* при всех наборах значений входящих в них переменных.

Формулы, принимающие значение *и* при всех наборах значений входящих в них переменных, а также формула *и* называются *тавтологиями*. Их называют также *тождественно истинными* формулами.

Тавтологии играют в логике особо важную роль как формулы, отражающие логическую структуру предложений, истинных в силу одной только этой структуры.

Предложения, которые формализуются тавтологиями, называются *логически истинными предложениями*.

Очевидно, что в принципе всегда можно установить, является ли данная формула тавтологией, составив ее таблицу истинности. Для того чтобы убедиться, что формула не есть тавтология, достаточно найти один набор значений переменных, при которых формула принимает значение *л*.

УПРАЖНЕНИЯ

11. Установите с помощью таблиц истинности, какие из следующих формул — тавтологии: а) $\overline{X\wedge Y}\leftrightarrow(\overline{X}\wedge\overline{Y})$; б) $\overline{X\wedge Y}\leftrightarrow(\overline{X}\vee\overline{Y})$; в) $\overline{X\vee Y}\leftrightarrow(\overline{X}\vee\overline{Y})$; г) $\overline{X\vee Y}\leftrightarrow(\overline{X}\wedge\overline{Y})$; д) $(X\to Y)\leftrightarrow(Y\to X)$; е) $(X\to Y)\leftrightarrow(\overline{X}\to\overline{Y})$; ж) $(X\to Y)\leftrightarrow(\overline{Y}\to\overline{X})$; з) $((X\to Y)\wedge(Y\to Z))\to\to(X\to Z)$.

12. Сформулируйте определение тождественно ложной формулы (по аналогии с определением тождественно истинной формулы). Докажите, что формула F тождественно ложна тогда и только тогда, когда формула $\overline{F}$ тождественно истинна.

13. Установите, какие из следующих предложений логически истинны: а) «Треугольник ABC — прямоугольный или остроугольный»; б) «Высказывание A истинно или ложно»; в) «Формула F тождественно истинна или тождественно ложна»; г) «Если Петр здоров, то он здоров и счастлив»; д) «Если Николай здоров, то он здоров или счастлив»; е) «Неверно, что число n делится на 2 и на 3 тогда и только тогда, когда оно не делится ни на 2, ни на 3»; ж) «Неверно, что 11 апреля 1977 года было тепло и не было осадков тогда и только тогда, когда было холодно или были осадки»; з) «Неверно, что число n — простое или четное тогда и только тогда, когда это число — не простое и не четное»; и) «Если $a\neq 0$ или $b\neq 0$, то неверно, что $a=0$ или $b=0$».

14. Докажите, не прибегая к таблицам истинности, что данные формулы не являются тавтологиями: а) $X\to\overline{X\to Y}$; б) $(Y\vee Z)\to\to((X\vee Y)\to(X\wedge Z))$.

§ 3. ЛОГИЧЕСКАЯ РАВНОСИЛЬНОСТЬ

1°. Равносильность формул логики высказываний. В логике говорят, что предложения равносильны, если они одновременно истинны либо одновременно ложны. Слово «одновременно» в этой фразе неоднозначно. Так, для предложений «Завтра будет вторник» и «Вчера было воскресенье» это слово имеет буквальный смысл: в понедельник они оба истинны, в остальные дни недели — оба ложны. Для уравнений $x=2$ и $2x=4$ «одновременно» означает «при одних и тех же значениях переменной». Прогнозы «Завтра будет дождь» и «Неверно, что завтра не будет дождя» одновременно подтвердятся (окажутся истинными) либо не подтвердятся (окажутся ложными). В сущности, это один и тот же прогноз, выраженный в двух разных формах, которые можно представить формулами X и $\overline{\overline{X}}$. Эти формулы одновременно принимают значение *и* либо значение *л* (проверьте!).

Такие формулы, как и соответствующие им предложения, естественно считать равносильными.

Формулы F_1 и F_2 называются ***равносильными,*** *если их эквиваленция $F_1 \leftrightarrow F_2$ — тавтология.*

(Напомним, что эквиваленция истинна тогда и только тогда, когда составляющие ее высказывания оба истинны либо оба ложны; следовательно, $F_1 \leftrightarrow F_2$ есть тавтология в том и только в том случае, если формулы F_1 и F_2 «одновременно», т. е. при одинаковых наборах значений переменных, входящих в формулы, принимают одинаковые значения.)

Говорят, что предложения P_1 и P_2 *равносильны в логике высказываний*, если соответствующие им формулы равносильны.

Равносильность двух формул логики высказываний (а также соответствующих этим формулам предложений) будем обозначать символом $\equiv$; запись $F_1 \equiv F_2$ читается так: «формула F_1 равносильна формуле F_2».

Выражение $F_1 \equiv F_2$ — не формула в языке логики высказываний. Оно является метаязыковым высказыванием о формулах F_1 и F_2, утверждающим, что эти формулы равносильны. Равносильность есть **отношение** между формулами (так же как равенство — это отношение между числами, параллельность — это отношение между прямыми и т. п.).

Легко убедиться, что отношение равносильности обладает следующими свойствами: а) рефлексивности: $F \equiv F$; б) симметричности: если $F_1 \equiv F_2$, то $F_2 \equiv F_1$; в) транзитивности: если $F_1 \equiv F_2$ и $F_2 \equiv F_3$, то $F_1 \equiv F_3$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Установите, какие из следующих высказываний истинны: а) $X \equiv \overline{\overline{X}}$; б) $X \equiv X \wedge X$; в) $Y \equiv Y \vee Y$; г) $X \wedge Y \equiv X \vee Y$; д) $X \vee \overline{X} \equiv и$; е) $X \wedge \overline{X} \equiv л$; ж) $л \to X \equiv и$; з) $X \to и \equiv и$; и) $X \to Y \equiv \overline{X} \vee Y$; к) $X \vee \overline{X} \equiv Y \to (X \to Y)$; л) $(X \wedge Y) \to X \equiv X \to (X \vee Z)$.

2. Какие из данных формул равносильны: а) $\overline{X \wedge Y}$; б) $\overline{X \vee Y}$; в) $X \wedge \overline{Y}$; г) $\overline{X} \vee \overline{Y}$; д) $X \to Y$; е) $Y \to X$; ж) $\overline{X} \to \overline{Y}$; з) $\overline{Y} \to \overline{X}$?

3. Установите, какие из следующих предложений равносильны в логике высказываний (воспользуйтесь результатами предыдущих упражнений): «Я читал эту книгу» (P_1); «Я не видел этого фильма» (P_2); «Я читал эту книгу, но не видел этого фильма» (P_3); «Неверно, что эту книгу я не читал» (P_4); «Неверно, что я видел этот фильм» (P_5); «Неверно, что я не читал эту книгу или видел этот фильм» (P_6); «Если отрезки конгруэнтны, то их длины равны» (Q_1); «Если длины отрезков равны, то они конгруэнтны» (Q_2);

«Если отрезки не конгруэнтны, то их длины не равны» (Q_3); «Если длины отрезков не равны, то они не конгруэнтны» (Q_4).

4. Докажите, что отношение равносильности между формулами логики высказываний обладает свойствами: а) рефлексивности; б) симметричности; в) транзитивности.

5. Известно, что $F_1 \equiv F_2$ и $F_3 \equiv F_2$. Можно ли утверждать, что $F_1 \equiv F_3$? Какие свойства отношения равносильности дают основания для такого утверждения?

6. Докажите утверждение: «Если две формулы равносильны, то их отрицания тоже равносильны».

2⁰. Законы логики. Равносильности формул логики высказываний часто называют з а к о н а м и л о г и к и. Перечислим наиболее важные из них:

I. $X \equiv X$ — *закон тождества.*

II. $X \wedge \overline{X} \equiv л$ — *закон противоречия.*

III. $X \vee \overline{X} \equiv и$ — *закон исключенного третьего.*

IV. $\overline{\overline{X}} \equiv X$ — *закон двойного отрицания.*

V. $X \wedge X \equiv X$; $X \vee X \equiv X$ — *законы идемпотентности*.*

VI. $X \wedge Y \equiv Y \wedge X$; $X \vee Y \equiv Y \vee X$ — *законы коммутативности (переместительности).*

VII. $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$; $(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$ — *законы ассоциативности (сочетательности).*

VIII. $X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$; $X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ — *законы дистрибутивности (распределительности).*

IX. $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$; $\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$ — *законы де Моргана**.*

Равносильности I—III выражают в математико-логической форме основные законы формальной логики, сформулированные еще Аристотелем. З а к о н т о ж д е с т в а утверждает, что мысль, заключенная в некотором высказывании, остается (считается) неизменной на протяжении всего рассуждения, в котором это высказывание фигурирует. З а к о н п р о т и в о р е ч и я говорит о том, что никакое предложение не может быть истинным одновременно со своим отрицанием. Утверждать, что какое-либо высказывание истинно вместе с его отрицанием, значит утверждать заведомую ложь. Так, например, предложения $x=y$ и $x \neq y$ не могут быть истинными одновременно, т. е. при одних и тех же значениях переменных x и y. Если мы знаем, что в предложениях «Эта функция — периодическая» и «Эта функция — неперио-

* На латинском языке idem означает «то же», potentia — «сила».

** Август де Морган (1806—1871) — английский логик.

дическая» речь идет об одной и той же функции и первое предложение истинно, то, согласно закону противоречия, второе предложение ложно. Закон исключенного третьего говорит о том, что для каждого высказывания имеются лишь две возможности: это высказывание истинно или ложно; третьего не дано.

Согласно закону двойного отрицания, отрицать отрицание какого-нибудь высказывания — то же, что утверждать это высказывание. Например, высказывание «Неверно, что $2\cdot 2\neq 4$» означает то же, что и «$2\times 2=4$».

Законы коммутативности и ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции аналогичны одноименным законам умножения и сложения чисел. Иногда дизъюнкцию так и называют логическим сложением, а конъюнкцию — логическим умножением. Имея в виду законы ассоциативности, будем иногда опускать скобки в формулах вида $(X\wedge Y)\wedge Z$, $X\wedge(Y\wedge Z)$, $(X\vee Y)\vee Z$ $X\vee(Y\vee Z)$. В отличие от сложения и умножения чисел логические сложение и умножение равноправны по отношению к дистрибутивности: не только конъюнкция дистрибутивна относительно дизъюнкции, но и дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции.

В силу законов идемпотентности в алгебре логики нет «показателей степеней» и «коэффициентов»: конъюнкция одинаковых «сомножителей» равносильна одному из них; дизъюнкция одинаковых «слагаемых» равносильна одному из них.

Смысл законов де Моргана можно выразить в кратких словесных формулировках: *отрицание конъюнкции равносильно дизъюнкции отрицаний*; *отрицание дизъюнкции равносильно конъюнкции отрицаний.*

УПРАЖНЕНИЯ

7. Имеет ли решение система неравенств $\begin{cases} x>2, \\ x\leqslant 2 \end{cases}$? На каком законе логики основан ваш ответ?

8. Как объяснить, что загадка «Хожу на голове, хотя и на ногах, хожу я без сапог, хотя и в сапогах» имеет решение-отгадку (гвоздь в подошве сапога)? Не нарушен ли здесь закон противоречия?

9. Что можно сказать об истинности предложения «Прямые a и b на плоскости параллельны или пересекаются»? Зависит ли его значение истинности от взаимного расположения прямых a и b? На каком законе логики основан ваш ответ?

10. Полиция задержала четырех гангстеров, подозреваемых в краже автомобиля: Анри, Луи, Жоржа и Тома. При допросе они дали следующие показания: Анри: «Это был Луи». Луи: «Это сделал Том». Жорж: «Это не я». Том: «Луи лжет, говоря, что это я». Дополнительное расследование показало, что правду сказал только один из них. Кто украл машину?

11. Что утверждается в следующих предложениях: а) «Неверно, что квадрат — это не ромб»; б) $\overline{2 \notin P}$ (P — множество простых чисел)?

12. Сформулируйте предложения, которые, согласно законам де Моргана, выражают то же, что и следующие предложения: а) «Неверно, что треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный»; б) «Неверно, что число 9 — четное или простое»; в) «Неверно, что каждое из чисел m и n четно»; г) «Неверно, что хотя бы одно из чисел r и s — простое»; д) $\begin{cases} a \neq 3, \\ b \neq 2; \end{cases}$ е) «Я не высплюсь или опоздаю».

13. Сформулируйте предложения, противоположные данным, применив законы де Моргана (предложением, противоположным предложению вида «если A, то B», называется предложение вида «если не A, то не B»): а) «Если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам»; б) «Если число делится на 2 и на 5, то оно делится на 10»; в) «Если натуральное число оканчивается нулем или пятью, то оно делится на 5»; г) «Если $ab=0$, то $a=0$ или $b=0$»; д) «Если $a^2+b^2=0$, то $a=0$ и $b=0$»; е) «Если A и B, то C или D».

14. Сформулируйте предложения, которые, согласно законам дистрибутивности, равносильны следующим: а) «Он знает математику и немецкий или французский язык»; б) «Я буду завтракать и обедать или завтракать и ужинать»; в) «Число n делится на 2 или на 3 и делится на 2 или на 5»; г) «Я подпишусь на «Комсомольскую правду» и «Известия» или на «Комсомольскую правду» и «Труд»

3°. Равносильные преобразования. Упрощение формул. Если в равносильные формулы всюду вместо какой-нибудь переменной подставить одну и ту же формулу, то вновь полученные формулы также окажутся равносильными (почему?). Таким способом из каждой равносильности можно получить сколько угодно новых равносильностей. Например, если в равносильность $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$ подставить $\overline{X}$ вместо X и $(\overline{X} \wedge Y)$ вместо Y, то получим новую равносильность: $\overline{\overline{X} \wedge (\overline{X} \wedge Y)} \equiv \overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{X} \wedge Y}$.

Если какую-нибудь формулу F_1, являющуюся частью формулы F, заменить формулой F_2, равносильной F_1, то полученная формула окажется равносильной F (почему?). На этом основании имеем:

$\overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{X} \wedge Y} \equiv X \vee \overline{\overline{X} \wedge Y}$ (по закону двойного отрицания);

$X \vee \overline{\overline{X} \wedge Y} \equiv X \vee (\overline{\overline{X}} \vee \overline{Y})$ (по закону де Моргана);

$X\vee(\bar{\bar{X}}\vee\bar{Y})\equiv X\vee(X\vee\bar{Y})$ (по закону двойного отрицания);

$X\vee(X\vee\bar{Y})\equiv(X\vee X)\vee\bar{Y}$ (по закону ассоциативности);

$(X\vee X)\vee\bar{Y}\equiv X\vee\bar{Y}$ (по закону идемпотентности).

Транзитивность отношения равносильности позволяет объединить первое и последнее звенья цепочки этих рассуждений в виде равносильности $\bar{\bar{X}}\vee\overline{\bar{X}\wedge Y}\equiv X\vee\bar{Y}$.

Замену формулы другой, ей равносильной, будем называть *равносильным преобразованием* данной формулы. Под *упрощением* формулы, не содержащей знаков $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$, условимся понимать равносильное преобразование, приводящее к формуле, которая не содержит отрицаний неэлементарных формул (в частности, двойных отрицаний) или содержит в совокупности меньшее число знаков $\wedge$ и $\vee$, чем исходная.

К перечисленным законам логики добавим еще несколько равносильностей, часто используемых при упрощении формул:

X. $X\wedge и\equiv X$; $X\vee л\equiv X$.

XI. $X\wedge л\equiv л$; $X\vee и\equiv и$.

XII. $X\wedge(X\vee Y)\equiv X$; $X\vee(X\wedge Y)\equiv X$ — *законы поглощения.*

XIII. $(X\vee Y)\wedge(\bar{X}\vee Y)\equiv Y$; $(X\wedge Y)\vee(\bar{X}\wedge Y)\equiv Y$ — *законы склеивания.*

Для сокращения и лучшей обозримости записей будем иногда опускать знак конъюнкции (так же как опускают знак умножения), условившись под выражением XY подразумевать формулу $(X\wedge Y)$. Так, например, вместо формулы $(X\wedge Y)\vee Z$ будем иногда писать $XY\vee Z$; запись $X(Y\vee Z)\vee\bar{X}$ нужно понимать как формулу $(X\wedge(Y\vee Z))\vee\bar{X}$.

Обратим внимание на характер соответствий между равносильностями, объединенными в пары под номерами V—XIII. В этих соответствиях проявляется так называемый п р и н ц и п д в о й с т в е н н о с т и. Две формулы, не содержащие знаков $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$, называются *двойственными*, если каждую из них можно получить из другой заменой $\wedge$, $\vee$, *и*, *л* соответственно на $\vee$, $\wedge$, *л*, *и*. Принцип двойственности утверждает следующее: *если две формулы* (не содержащие знаков $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$) *равносильны, то двойственные им формулы тоже равносильны.*

Например, для формулы *л* двойственной является формула *и*, а для формулы $X\wedge л$ — формула $X\vee и$; убедившись, что $X\wedge л\equiv л$, согласно принципу двойственности получаем равносильность $X\vee и\equiv и$.

УПРАЖНЕНИЯ

15. Докажите равносильности X—XII, пользуясь определениями конъюнкции и дизъюнкции.

16. Докажите законы склеивания с помощью равносильных преобразований. Какие законы логики вы использовали при доказательстве?

17. Перечислите равносильности, использованные при следующих упрощениях: $(\overline{X\vee\overline{\overline{Y}}}\vee\overline{X}Z)(Y\vee\overline{Y})(Y\vee Z)\equiv(\overline{X\vee\overline{\overline{Y}}}\vee\overline{X}Z)\wedge и\wedge(Y\vee Z)\equiv(\overline{X\vee\overline{\overline{Y}}}\vee\overline{X}Z)(Y\vee Z)\equiv(\overline{X}Y\vee\overline{X}Z)(Y\vee Z)\equiv\overline{X}(Y\vee Z)(Y\vee Z)\equiv\overline{X}(Y\vee Z)$.

18. Упростите следующие формулы с помощью законов поглощения: а) $X(X\vee Y)(X\vee Z)$; б) $X_1X_2\vee X_1X_2X_3\vee X_1\vee X_1X_4Z$; в) $XY(XZ\vee XY)$; г) $X_1X_2\vee X_1X_2X_3\vee X_1X_2X_4$.

19. Упростите следующие формулы с помощью законов склеивания: а) $\overline{X}\overline{Y}Z\vee XYZ$; б) $(X\vee Y\vee Z)(X\vee\overline{Y}\vee Z)$; в) $XYZ\vee\overline{X}YZ\vee X\overline{Y}Z\vee XY\overline{Z}$; г) $XYZ\vee X\overline{YZ}$; д) $(\overline{X}\vee YZ)(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})$.

20. Упростите формулы: а) $(\overline{\overline{\overline{X}\,\overline{Y}}}\vee\overline{X})\wedge\overline{X\vee\overline{\overline{\overline{X}}Y}}$; б) $(\overline{XY}\vee\overline{X}YZ)\wedge(\overline{X}\vee\overline{XY\vee\overline{Y}})$; в) $XYZ\vee X\overline{YZ}\vee XYZ\vee X\overline{Y}$.

21. Упростите следующую инструкцию: «Подчеркивайте числа, которые одновременно кратны трем, оканчиваются нулем и имеют сумму цифр, большую 37. Подчеркивайте также те числа, которые не делятся на 3, оканчиваются нулем и имеют сумму цифр, не превосходящую 37. Кроме того, подчеркивайте числа, которые оканчиваются нулем, делятся на 3 и сумма цифр которых не более 37, а также числа, оканчивающиеся нулем, с суммой цифр, большей 37, и не кратные трем. И наконец, подчеркивайте числа, кратные трем, не оканчивающиеся нулем и имеющие сумму цифр, превосходящую 37».

22. При составлении расписания на понедельник были высказаны пожелания, чтобы математика была первым или вторым уроком, физика — первым или третьим, литература — вторым или третьим. Можно ли удовлетворить одновременно все высказанные пожелания?

23. Обвиняемые A, B и C дали следующие показания. A: «B виновен, а C невиновен»; B: «A невиновен или C виновен»; C: «Я невиновен, но хотя бы один из A и B виновен». Совместимы ли эти показания, т. е. могут ли они быть верны одновременно? Предполагая, что все показания правдивы, определите, кто виновен.

24. Напишите формулу, двойственную формуле $(\overline{X}Y\vee X\overline{Y}Z\vee\overline{XZ})\wedge и$.

25. Докажите, что формулы $XY\vee\overline{X}\,\overline{Y}$ и $(\overline{X}\vee Y)(\overline{Y}\vee X)$ равносильны. Запишите равносильность, которая следует из доказанной согласно принципу двойственности.

4^0. **Выражение импликации и эквиваленции через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.** До сих пор мы занимались равносильными преобразованиями формул, не содержащих знаков $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$. Сейчас покажем, что всякую формулу, содержащую $\rightarrow$ или $\leftrightarrow$, можно заменить равносильной ей формулой, не содержащей этих знаков.

Имеют место следующие равносильности (проверьте!):

$$X \rightarrow Y \equiv \bar{X} \vee Y \quad (1); \qquad X \rightarrow Y \equiv \overline{X \wedge \bar{Y}}. \qquad (2)$$

Будем говорить, что равносильность (1) выражает импликацию через дизъюнкцию и отрицание, а равносильность (2) — через конъюнкцию и отрицание.

Эквиваленция выражается через конъюнкцию и импликацию равносильностью

$$X \leftrightarrow Y \equiv (X \rightarrow Y)(Y \rightarrow X) \qquad (3)$$

(проверьте!). Из равносильностей (3) и (1) получаем равносильность

$$X \leftrightarrow Y \equiv (\bar{X} \vee Y)(\bar{Y} \vee X), \qquad (4)$$

выражающую эквиваленцию через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Из равносильностей (3) и (2) получаем равносильность

$$X \leftrightarrow Y \equiv \overline{X \wedge \bar{Y}} \wedge \overline{\bar{X} \wedge Y}, \qquad (5)$$

выражающую эквиваленцию через конъюнкцию и отрицание.

Очевидно, что в принципе можно было бы обойтись всего двумя операциями: конъюнкцией и отрицанием. Возникает вопрос: а нельзя ли выразить через какую-нибудь одну операцию все остальные? Можно доказать, что ни через одну из введенных здесь пяти логических операций этого сделать нельзя. Нужны по меньшей мере две операции; при этом одной из них обязательно должно быть отрицание. Все остальные операции можно выразить через конъюнкцию и отрицание, дизъюнкцию и отрицание или импликацию и отрицание. Через эквиваленцию и отрицание остальные операции выразить нельзя.

Зачем же вводить пять операций, когда можно обойтись двумя? Напомним, что введенные пять операций соответствуют наиболее употребительным союзам. Использование лишь двух операций усложнило бы формализацию предложений естественного языка и привело бы к громоздким, труднообозримым формулам. В других приложениях математической логики эти доводы в пользу введения и употребления всех пяти операций теряют силу; там ограничиваются меньшим числом операций. Аналогичное положение имеет место в арифметике: всякое число может быть записано с помощью двух цифр: 0 и 1; однако, поскольку записи чисел и выкладок в двоичной системе счисления очень громоздки, мы прибегаем к этой системе лишь в специальных случаях.

Можно ввести логическую операцию, через которую выражаются все пять операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция. Такова, например, операция, соответствующая сложному союзу «не A или не B» («или» — неразделительное). Эта операция обозначается символом | (например, $A|B$) и получила название *штрих Шеффера*. Штрих Шеффера определяется с помощью такой таблицы:

X	Y	$X \mid Y$
и	*и*	*л*
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*
л	*л*	*и*

Непосредственно из таблицы видно, что $X|Y \equiv \overline{X \wedge Y}$. Легко убедиться (сделайте это!), что $X|X \equiv \overline{X}$. Из этих двух равносильностей следует, что $X \wedge Y \equiv (X|Y)\,|\,(X|Y)$.

Таким образом, нам удалось выразить через штрих Шеффера отрицание и конъюнкцию, а через них, в свою очередь, можно выразить дизъюнкцию, импликацию и эквиваленцию.

УПРАЖНЕНИЯ

26. Сформулируйте теорему «Если векторы препендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю», заменив связку «если... то...» связками «и» и «не» («неверно, что»).

27. Сформулируйте предложение «Две формулы равносильны тогда и только тогда, когда их эквиваленция — тавтология», заменив связку «тогда и только тогда, когда» связками: а) «и» и «если... то...»; б) «и», «или» и «не», в) «и» и «не».

28. Установите, какая из следующих формул равносильна формуле $\overline{X \to Y}$: а) $\overline{X} \to \overline{Y}$; б) $X \to \overline{Y}$; в) $\overline{X} \to Y$; г) $X \wedge \overline{Y}$.

29. Сформулируйте отрицания следующих предложений в утвердительной форме, т. е. так, чтобы они не начинались со слов «неверно, что»: а) «Если Париж расположен на Сене, то белые медведи живут в Африке»; б) «Если Иванов занимается в спортивной секции, то он умеет плавать»; в) «Если в данном четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то этот четырехугольник — ромб»; г) «Если $a \neq c$ и $b \neq c$, то $a \neq b$».

30. Прочтите текст: «Известно, что у Баха в пяти поколениях его предков насчитывается 18 музыкальных дарований, много талантливых людей было в роду у Дарвина... И возникает сразу предположение, вполне законное, что наши будущие способности, наша личность... предопределены... Это — неверное заключение. Стоит лишь вспомнить, сколько посредственных людей родилось в семьях выдающихся личностей». (*Дубинин Н. П.* Личностью быть. — Комсомольская правда, 1971, 1 сентября). Объясните, почему последняя фраза опровергает сделанное предположение.

31. Студент решил в каникулы прочитать не менее двух книг, сходить в театр или на концерт и, если выпадет снег, съездить за город на лыжную прогулку. В каком случае можно считать, что он свое решение не выполнил?

32. В одном спортивном клубе были приняты такие правила: а) члены волейбольной секции обязаны заниматься и в секции плавания; б) нельзя состоять одновременно в шахматной секции и в секции плавания, не занимаясь в волейбольной секции; в) ни один член шахматной секции не может состоять в волейбольной секции. Упростите эти правила.

33. Выразите: а) конъюнкцию, импликацию и эквиваленцию через дизъюнкцию и отрицание; б) конъюнкцию, дизъюнкцию и эквиваленцию через импликацию и отрицание.

34. Формализуйте с помощью штриха Шеффера предложения: а) «Противоположные стороны трапеции не конгруэнтны или не параллельны»; б) «Неверно, что функция f — четная и возрастающая на множестве всех действительных чисел».

35. Выразите через штрих Шеффера: а) дизъюнкцию; б) импликацию; в) эквиваленцию.

36. Какое предложение соответствует формуле $X|(Y|Y)$, если X означает «Петр едет на Урал», а Y — «Николай едет в Сибирь»?

§ 4. ОБРАТНЫЕ И ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе мы будем говорить о понятиях, знакомых вам по школьному курсу. Однако ввиду важности этих понятий полезно рассмотреть их еще раз более систематично и под несколько иным углом зрения. Речь пойдет о теоремах, сформулированных в виде импликаций, и логических соотношениях между этими теоремами и предложениями, которые получаются из них перестановкой членов импликации или отрицанием каждого из них. Для каждого предложения* $A \rightarrow B$ можно соста-

* Имеется в виду «предложение, формализуемое импликацией $A \rightarrow B$». К подобным сокращенным оборотам мы будем прибегать и далее.

вить три таких предложения: $B \to A$, $\bar{A} \to \bar{B}$ и $\bar{B} \to \bar{A}$. Предложение $B \to A$ называют *обратным* данному; предложение $\bar{A} \to \bar{B}$ — *противоположным* данному; предложение $\bar{B} \to \bar{A}$ — *обратно-противоположным* (или противоположно-обратным) данному.

Заметим, что в логике под теоремой понимают только доказуемое предложение. Поэтому мы будем избегать таких, например, выражений, как «Обратная теорема неверна», и говорить вместо этого так: «Предложение, обратное данной теореме, не есть теорема» либо «Предложение, обратное данному, неверно (ложно)».

1^0. Обратные предложения. Для всякой теоремы вида «если A, то B» можно сформулировать обратное ей предложение «если B, то A». Однако не для всякой теоремы предложение, ей обратное, также является теоремой. Пусть, например, даны такие две теоремы: «Если два квадрата конгруэнтны, то их площади равны»; «Если два прямоугольника конгруэнтны, то их площади равны». Предложение «Если площади двух квадратов равны, то эти квадраты конгруэнтны», обратное первой из данных теорем, является теоремой (докажите!). Предложение «Если площади двух прямоугольников равны, то они конгруэнтны», обратное второй из данных теорем, теоремой не является; его легко опровергнуть (сделайте это!).

Эти примеры свидетельствуют о неравносильности предложений вида $A \to B$ и $B \to A$. В неравносильности предложений такого вида можно также убедиться, сравнив таблицы истинности формул $X \to Y$ и $Y \to X$:

X	Y	$X \to Y$	$Y \to X$
и	*и*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*
л	*л*	*и*	*и*

Поскольку два последних столбца в таблице не одинаковы, эквиваленция этих формул не является тавтологией, т. е. они не равносильны. Более того, из таблицы видно, что одновременно с истинностью предложения вида «если A, то B», предложение вида «если B, то A» может быть как истинным, так и ложным.

Таким образом, если доказана истинность какого-либо предложения, то независимо от этого обратное ему предложение требует доказательства или опровержения.

Приведем отрывок из всемирно известной сказки «Алиса в стране чудес» Льюиса Кэролла, иллюстрирующий недопустимость бездоказательного обращения утверждений. (Льюис Кэролл — псевдоним английского математика Чарльза Доджсона.)

— Нужно всегда говорить то, что думаешь, — заметил Мартовский заяц.

— Я так и делаю, — поспешила объяснить Алиса. — По крайней мере... По крайней мере я думаю то, что говорю... а это одно и то же...

— Совсем не одно и то же, — возразил Болванщик. — Так ты еще чего доброго скажешь, будто «Я вижу то, что ем» и «Я ем то, что вижу» — одно и то же!

— Так ты еще скажешь, будто «Что имею, то люблю» и «Что люблю, то имею» — одно и то же! — подхватил Мартовский заяц.

— Так ты еще скажешь, — проговорила, не открывая глаз, Соня, — будто «Я дышу, пока сплю» и «Я сплю, пока дышу» — одно и то же!

(*Льюис Кэролл.* Алиса в стране чудес. София, 1967).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Приведите по два примера известных вам теорем, для которых обратные предложения верны; неверны.

2. Сформулируйте предложения, обратные данным: а) «Если в четырехугольнике две противоположные стороны конгруэнтны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм»; б) «Если последовательность монотонна и ограниченна, то она имеет предел»; в) «Если треугольник равнобедренный, то два его угла конгруэнтны»; г) Если каждое слагаемое суммы четно, то сумма четна»; д) «Если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны»; е) «Если параллелограмм — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны»; ж) «Точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии»; з) «В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов».

3. Какие из предложений, обратных теоремам из упр. 2, верны (являются теоремами)?

2°. Противоположные предложения. Для всякой теоремы, сформулированной в виде импликации $A \rightarrow B$, можно составить противоположное предложение $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$. Предложение, противоположное данной теореме, может быть также теоремой, но может ею и не быть. В этом легко убедиться, сравнив таблицы истинности формул $X \rightarrow Y$ и $\overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ (составьте эти таблицы!); в том случае, когда предложение вида $X \rightarrow Y$ истинно, предложение $\overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ может быть как истинным, так и ложным. Следовательно, предложение, противоположное доказанной теореме, в свою очередь нуждается в доказательстве или опровержении.

Если условие или заключение данной теоремы представляет собой конъюнкцию или дизъюнкцию, то при составлении предложения, противоположного этой теореме, нужно учитывать соответствующий закон де Моргана (см. упр. 13 из § 3). Иногда конъюнкция или дизъюнкция в формулировке теоремы присутствует неявно, «замаскированно». Поэтому, чтобы правильно сформулировать предложение, противоположное данной теореме, нужно сначала тщательно проанализировать ее формулировку и выявить подразумеваемые конъюнкции или дизъюнкции (если таковые имеются). Например, в заключении теоремы «Если треугольник ABC равнобедренный, то два его угла конгруэнтны» скрыта дизъюнкция: $\angle A = \angle B$, или $\angle B = \angle C$, или $\angle A = \angle C$. Отрицание этой дизъюнкции дает конъюнкцию $\angle A \neq \angle B$, и $\angle B \neq \angle C$ и $\angle A \neq \angle C$, что короче можно выразить так: «Никакие два угла треугольника ABC не конгруэнтны».

УПРАЖНЕНИЕ

4. Сформулируйте предложения, противоположные теоремам, приведенным в упр. 2. Какие из этих предложений являются теоремами? Сопоставьте ответы на этот вопрос с результатами упр. 3. Совпадают ли они? (Если какие-нибудь два ответа не совпадают, то один из них неверен.)

3⁰. Закон контрапозиции. Нам осталось рассмотреть соотношение между обратно-противоположными предложениями, т. е. предложениями вида $A \rightarrow B$ и $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$. Имеет место следующая равносильность (докажите!):

$$X \rightarrow Y \equiv \overline{Y} \rightarrow \overline{X} \text{ — закон контрапозиции.}$$

Согласно закону контрапозиции: 1) *два предложения вида* $A \rightarrow B$ *и* $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ *одновременно истинны либо одновременно ложны;* 2) *предложение, обратно противоположное какой-либо теореме, также является теоремой;* 3) *вместо данной теоремы можно доказывать обратно-противоположную ей теорему.*

Пусть, например, требуется доказать утверждение «Если m^2 нечетно, то m нечетно». Сформулируем и докажем обратно-противоположную теорему: «Если m четно, то m^2 четно»; действительно, если m четно, то $m=2p$ (p — натуральное число), откуда $m^2=4p^2=2\cdot(2p^2)=$

$=2q$, т. е. m^2 четно. Предположение, обратно-противоположное данному, доказано; следовательно, доказано и данное утверждение.

Если в равносильность $X \to Y \equiv \overline{Y} \to \overline{X}$ подставить Y вместо X и X вместо Y, то получим $Y \to X \equiv \overline{X} \to \overline{Y}$. Из этой равносильности следует, что: 1) *предложение, обратное данному, и предложение, противоположное данному, одновременно истинны либо одновременно ложны; 2) из двух предложений — обратного данной теореме и ей противоположного — достаточно доказать или опровергнуть какое-нибудь одно; тем самым будет доказано или соответственно опровергнуто и второе.*

УПРАЖНЕНИЯ

5. Для каждой теоремы из упр. 2 сформулируйте теорему, равносильную ей согласно закону контрапозиции.

6. Докажите, пользуясь законом контрапозиции, следующие теоремы: а) «Если mn — нечетное число, то m и n нечетны»; б) «Если значение выражения $2t/(1+t^2)$ — иррациональное число, то t иррационально»; в) «Если $a^2+b^2 \neq 0$, то $a \neq 0$ или $b \neq 0$».

7. Какие из следующих предложений равносильны: а) «Если x — сепулька, то x — обитатель Интеропии»; б) Если x — не сепулька, то x не обитает в Интеропии»; в) «Если x — житель Интеропии, то x — сепулька»; г) «Если x — сепулька, то x не обитает в Интеропии»?

8. Родители сказали детям: «Если мы поедем в дом отдыха, то вы поедете в лагерь». В школе детей спросили, куда они поедут летом. «Если мы поедем в лагерь, то родители поедут в дом отдыха»,—ответил Петя. Галя сказала: «Если папа с мамой не поедут в дом отдыха, то мы не поедем в лагерь». «Нет, не так, — вмешался Коля. — Если мы не поедем в лагерь, то родители не поедут в дом отдыха». Чей ответ равносилен тому, что сказали родители? Кто из детей сказал разными словами одно и то же?

9. Проанализируйте следующий текст: «Разные вещества требуют для нагревания до одинаковой температуры разные количества теплоты;... разные вещества от получения одинаковых количеств теплоты нагреваются до разных температур». Что уместно вставить вместо многоточия: «обратно» или «иначе говоря»?

10. Прочтите внимательно следующий текст. Какое слово в нем неуместно? Почему?

«Рано или поздно человек находит пути к искусственному повторению всего, что когда-нибудь и где-нибудь создала природа... и, наоборот, явления, которые не в силах воспроизвести человек, относятся к принципиально невыполнимым и в природе». (Кибернетика ожидаемая и кибернетика неожиданная. М., Наука, 1968, с. 31.)

4⁰. Достаточные и необходимые условия. Если предложение $A \to B$ — теорема, то говорят, что A есть *достаточное условие* B, а B есть *необходимое условие* A.

Если оба взаимно-обратных предложения $A \to B$ и $B \to A$ — теоремы, т. е. предложение $A \leftrightarrow B$ — теорема, то B является одновременно необходимым и достаточным условием A, а A — необходимым и достаточным условием B. Если $A \to B$ — теорема, а $B \to A$ теоремой не является, то A — достаточное, но не необходимое условие B, а B — необходимое, но не достаточное условие A.

УПРАЖНЕНИЯ

11. Сформулируйте теорему «Если два прямоугольника конгруэнтны, то площади их равны» в виде: а) необходимого условия; б) достаточного условия.

12. Утверждение «Конгруэнтность треугольников есть достаточное условие их равновеликости» сформулируйте в виде условного предложения (в форме «если A, то B»).

13. Утверждение «Четность суммы есть необходимое условие четности каждого слагаемого» сформулируйте в виде условного предложения.

14. Утверждение «Для того чтобы диагонали четырехугольника были перпендикулярны, достаточно, чтобы этот четырехугольник был ромбом» сформулируйте в виде: а) условного предложения; б) необходимого условия.

15. Теорему «Для того чтобы функция была дифференцируемой в точке, необходимо, чтобы она была непрерывной в этой точке» сформулируйте в виде: а) условного предложения; б) достаточного условия.

16. Теорему «Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали взаимно перпендикулярны» сформулируйте в виде необходимого и достаточного условия (дайте две формулировки).

17. Сформулируйте две взаимно-обратные теоремы, соответствующие утверждению «Для того чтобы два отрезка были конгруэнтны, необходимо и достаточно, чтобы их длины были равны».

18. Даны предложения: «Четырехугольник — параллелограмм» (Q); «Две противоположные стороны четырехугольника конгруэнтны и параллельны» (P_1); «Диагонали четырехугольника конгруэнтны» (P_2); «Две противоположные стороны четырехугольника конгруэнтны» (P_3); «Все стороны четырехугольника конгруэнтны» (P_4). Заполните пропуски: а) P_1 есть... и ...условие Q; б) P_2 есть... и... условие Q; в) P_3 есть... и ...условие Q; г) P_4 есть... и...условие Q.

19. Сформулируйте: а) достаточное, но не необходимое условие истинности импликации; б) необходимое, но не достаточное условие ложности импликации; в) необходимое и достаточное условие ложности импликации; г) необходимое и достаточное условие истинности импликации.

5⁰. Структура определений. Рассмотрим следующее определение: «Параллелограмм называется ромбом, если его смежные стороны конгруэнтны». После того как сформулировано это определение, совокупность предложений, на которые мы можем опираться при рассуждениях, пополнилась еще двумя: 1) «Если параллелограмм — ромб, то его стороны конгруэнтны»; 2) «Если смежные стороны параллелограмма конгруэнтны, то этот параллелограмм — ромб».

Таким образом, в определении подразумевалась эквиваленция: «Параллелограмм — ромб тогда и только тогда, когда его смежные стороны конгруэнтны».

Эквиваленция подразумевается в каждом определении, как бы оно ни было сформулировано. Часто в определениях вместо союза «тогда и только тогда, когда» употребляют союзы «если... то...», «когда», «в том случае, если». Но следует отчетливо понимать и помнить, что это делается только для благозвучия, краткости и т. п. В определениях всегда подразумевается союз «тогда и только тогда, когда».

Условность соглашения об истинности эквиваленции, утверждаемой определением, в словесной формулировке определения подчеркивается словом «называется». Если же определение записано с использованием символа эквиваленции ($\leftrightarrow$), то над этим символом (или под ним) пишется df (от латинского definitio, что значит «определение»). Если через A обозначить предложение «Параллелограмм — ромб», а через B — «Смежные стороны параллелограмма конгруэнтны», то определение ромба, сформулированное выше, запишется так: $A \overset{\text{df}}{\leftrightarrow} B$.

Примеры. 1. Определение «Треугольник называется равнобедренным, когда две его стороны конгруэнтны» надо понимать так: «Треугольник называется равнобедренным тогда и только тогда, когда (по меньшей мере) две его стороны конгруэнтны». (Слова «по меньшей мере» желательно добавить потому, что слово «две» может означать и «ровно две», и «две и только две».)

2. Параллелограмм обычно определяют как четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны. Из этого определения вытекают утверждения: «Если четырехугольник — параллелограмм, то его противоположные стороны параллельны» и «Если противоположные стороны четырехугольника параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм». Затем доказывают теоремы о необходимых и достаточных признаках параллелограмма:

а) «Для того чтобы выпуклый четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы две его противоположные стороны были конгруэнтны и параллельны»;

б) «Для того чтобы выпуклый четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его противоположные стороны были попарно конгруэнтны»;

в) «Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы точка пересечения его диагоналей была центром симметрии».

Определение и три приведенные теоремы имеют соответственно структуру $P\leftrightarrow Q$, $P\leftrightarrow Q_1$, $P\leftrightarrow Q_2$, $P\leftrightarrow Q_3$.

Любое из предложений а), б), в) можно принять в качестве определения параллелограмма (вставив слово «называется»), а «бывшее» определение доказать на основании нового определения как теорему.

УПРАЖНЕНИЯ

20. Сформулируйте в виде эквиваленции определение: а) тавтологии; б) равносильности формул логики высказываний; в) необходимого условия; г) достаточного условия; д) простого числа.

21. Исходя из определения «четырехугольник называется параллелограммом тогда и только тогда, когда его стороны попарно конгруэнтны», докажите теорему «Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его противоположные стороны были параллельны».

22. Сформулируйте два различных определения понятия «квадрат» через понятие «прямоугольник». Приняв поочередно каждую из этих формулировок за теорему, докажите ее на основании определения.

§ 5. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ

1°. Отношение следования между формулами логики высказываний. Когда мы говорим, что одно предложение P_2 следует из другого предложения P_1, то имеем в виду следующее: всякий раз, когда истинно предложение P_1, истинно и предложение P_2. В логике высказываний это означает, что для формул F_1 и F_2, соответствующих предложениям P_1 и P_2, нет такого набора значений переменных, при котором F_1 истинна, а F_2 ложна. Например, из предложения «Я пойду в кино» следует предложение «Я пойду в кино или в театр», так как для соответствующих им формул X и $X\vee Y$ невозможен набор значений X и Y, при котором первая формула истинна, а вторая ложна: если X принимает значение *и*, то согласно определению дизъюнкции $X\vee Y$ также принимает значение *и*.

Говорят, что *из формулы* F_1 *следует формула* F_2, *если* $F_1\rightarrow F_2$ — *тавтология*. При этом употребляют запись

$F_1 \models F_2$. (Чтобы лучше уяснить смысл этого определения, вспомните, когда импликация, согласно ее определению, ложна.)

Следование, как и равносильность, есть отношение между формулами. Отношение следования обладает свойствами рефлексивности и транзитивности, но не обладает свойством симметричности.

Для того чтобы доказать, что из формулы F_1 не следует формула F_2, достаточно найти такой набор значений входящих в эти формулы переменных, при котором первая формула принимает значение *и*, а вторая — *л*.

Если предложениям P_1 и P_2 соответствуют формулы F_1 и F_2 такие, что из F_1 следует F_2, то говорят, что из P_1 *следует* P_2 в логике высказываний.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Установите, в каких случаях из первой формулы следует вторая: а) $X \wedge Y$; X; б) X; $X \wedge Y$; в) Y; $X \vee Y$; г) $X \wedge Y$; $X \vee Y$; д) $X \wedge Y$; $X \to Y$; е) $X \to Y$; $Y \to X$; ж) $X \to Y$; $\overline{X} \to \overline{Y}$; з) $(X \to Y) \wedge X$; Y; и) $(X \to Y) \wedge Y$; X.

2. Докажите, что отношение следования формул не обладает свойством симметричности.

3. Докажите, что: а) тавтология следует из любой формулы; б) из тождественно ложной формулы следует любая формула.

4. Расположите следующие формулы в таком порядке, чтобы из каждой формулы следовали все, стоящие после нее: а) $X \vee \overline{X}$, $X \wedge Y$, $X \wedge \overline{X}$, $X \to Y$, $X \leftrightarrow Y$; б) $\overline{X} \leftrightarrow Y$, $X \to (\overline{X} \to Y)$, $X \to (Y \to X)$, $X \vee Y$, $\overline{X} \wedge Y$.

5. Докажите, что отношение следования между формулами обладает свойствами рефлексивности и транзитивности.

6. Следует ли на уровне логики высказываний: а) из теоремы, обратной данной, теорема, противоположная данной; б) из данной теоремы ей обратно-противоположная; в) из данной теоремы ей противоположная; г) из данной теоремы ей обратная?

7. Докажите, что если из формулы F_1 следует формула F_2, а из формулы F_2 следует формула F_1, то эти формулы равносильны. Докажите обратное.

8. Вставьте вместо многоточия нужное слово («и» либо «или») так, чтобы получилось истинное высказывание: а) «Формулы F_1 и F_2 равносильны тогда и только тогда, когда из F_1 следует F_2... из F_2 следует F_1»; б) «Формулы F_1 и F_2 не равносильны тогда и только тогда, когда из F_1 не следует F_2... из F_2 не следует F_1».

9. Придумайте по два таких предложения, чтобы в логике высказываний: а) из первого следовало второе, но из второго не следовало первое; б) из первого следовало второе и из второго следовало первое.

10. Следует ли из предложения «Если студент много занимается, то он успешно сдает экзамены» предложение «Студент, провалившийся на экзамене, занимался мало»?

2°. Правильные и неправильные аргументы. Перейдем теперь к вопросу о том, как по форме (структуре) предложений, последовательность которых выражает некоторое рассуждение, определить, правильно это рассуждение или нет.

Будем называть *аргументом* совокупность предложений, про одно из которых, называемое *заключением*, говорится, что оно следует из остальных, называемых *посылками* (посылка, в частности, может быть единственной).

Примеры. 1. «Если четырехугольник $ABCD$ — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны. Четырехугольник $ABCD$ — ромб. Следовательно, его диагонали взаимно перпендикулярны».

2. «Если 10 делится на 3, то 100 делится на 3; 10 делится на 3, следовательно, 100 делится на 3».

3. «Если 10 — четное число, то 100 — четное число; 100 — четное число, следовательно, 10 — четное число».

4. «Если множество простых чисел конечно, то существует наибольшее простое число. Наибольшего простого числа не существует. Следовательно, множество простых чисел бесконечно».

Выводя заключение из некоторой совокупности посылок, мы считаем, что если все посылки истинны и рассуждение правильно, то заключение должно быть истинным. Исходя из этого, примем следующее определение: *аргумент называется п р а в и л ь н ы м, если из конъюнкции его посылок следует заключение.*

Из этого определения вытекает п р а в и л о: *чтобы установить, является ли аргумент правильным, достаточно: а) формализовать все посылки и заключение; б) составить конъюнкцию формализованных посылок; в) проверить, следует ли из полученной формулы формула, соответствующая заключению. Если следует, то аргумент — правильный, если же нет, то аргумент — неправильный.*

При записи аргументов над горизонтальной чертой будем записывать посылки, а под ней — заключение. Например, аргумент 1 в формализованном виде выглядит так:

$$\begin{array}{|l} X \to Y \\ X \\ \hline Y \end{array}$$

Легко убедиться, что этот аргумент — правильный. В самом деле, из формулы $(X \to Y)X$ (конъюнкции посылок) следует формула Y, соответствующая заключению, так как формула $(X \to Y) X \to Y$ — тавтология (проверьте!).

Аргумент 2 в формализованном виде выглядит так же, как аргумент 1; следовательно, он тоже правильный.

Аргумент 3 имеет вид

$$\left| \begin{array}{l} X \to Y \\ Y \\ \hline X \end{array} \right.$$

; соответствующая формула $(X \to Y) Y \to X$ не есть тавтология (проверьте!), т. е. из конъюнкции посылок не следует заключение. Следовательно, аргумент — неправильный.

Надо отчетливо понимать, что правильность рассуждения сама по себе еще не обеспечивает истинности заключения. Так, например, аргумент 2 — правильный, но его заключение (100 делится на 3) ложно. Для того чтобы, рассуждая правильно, наверняка получить истинное заключение, нужно позаботиться об истинности всех посылок. Если хотя бы одна посылка правильного аргумента ложна (как, например, вторая посылка аргумента 2), то заключение может оказаться как истинным, так и ложным.

Истинность всех посылок правильного аргумента является достаточным условием истинности его заключения.

Если заключение истинно, то это еще не значит, что аргумент — правильный. В неправильном аргументе 3 истинны и посылки, и заключение; однако истинность заключения не вытекает из истинности посылок. Рассуждая подобным образом, т. е. по схеме

$$\left| \begin{array}{l} X \to Y \\ Y \\ \hline X \end{array} \right.$$

, можно при истинных посылках получить и ложное заключение. Пусть, например, X означает «Углы A и B — вертикальные», а Y — «Углы A и B конгруэнтны». Ясно, что при истинности обеих посылок («Если углы A и B — вертикальные, то они конгруэнтны» и «Углы A и B конгруэнтны») может оказаться, что заключение («Углы A и B — вертикальные») ложно.

Итак, суть различия между правильными и неправильными аргументами в том, что истинность всех посылок правильного аргумента гарантирует истинность заключения; в неправильном аргументе с истинными посылками заключение может быть как истинным, так и ложным.

Правильные аргументы вида

$$\begin{array}{|l} X \to Y \\ X \\ \hline Y \end{array} \qquad (1) \quad \text{и} \quad \begin{array}{|l} X \to Y \\ \overline{Y} \\ \hline \overline{X} \end{array} \qquad (2)$$

очень часто используются в рассуждениях (особенно в математических); эти схемы полезно запомнить.

Неправильные аргументы вида

$$\begin{array}{|l} X \to Y \\ Y \\ \hline X \end{array} \qquad (3) \quad \text{и} \quad \begin{array}{|l} X \to Y \\ \overline{X} \\ \hline \overline{Y} \end{array} \qquad (4)$$

являются весьма распространенными логическими ошибками. Аргумент вида (3) станет правильным [сведется к виду (1)], если посылку вида $X \to Y$ заменить посылкой вида $Y \to X$. Таким образом, ошибка в рассуждении по схеме (3) заключается в том, что в качестве посылки неверно выбрана одна из двух взаимно-обратных теорем.

УПРАЖНЕНИЯ

11. Докажите, что всякий аргумент вида (2) — правильный, а вида (4) — неправильный.

12. Проверьте последний из четырех аргументов, приведенных в начале этого пункта в качестве примеров.

13. Можно ли на основании теоремы Пифагора утверждать, что: а) треугольник со сторонами 3, 4, 5 — прямоугольный; б) треугольник со сторонами 3, 4, 6 — не прямоугольный?

14. Можно ли на основании посылок «Если предмет интересен, то он полезен» и «Предмет неинтересен» заключить, что предмет бесполезен?

15. По виду следующих схем определите, какие из них соответствуют правильным аргументам (воспользуйтесь известными вам равносильностями):

а) $\begin{array}{|l} (\overline{X} \vee Y) \to Z \\ X \to Y \\ \hline Z \end{array}$; б) $\begin{array}{|l} \overline{X \vee \overline{Y}} \to (Z \wedge Z_1) \\ \overline{Z} \vee \overline{Z}_1 \\ \hline X \vee Y \end{array}$; в) $\begin{array}{|l} (X \vee Y) \to (Z \to Z_1) \\ \overline{X} \wedge \overline{Y} \\ \hline Z \wedge \overline{Z}_1 \end{array}$;

г) $\begin{array}{|l} X \to (Y \longleftrightarrow Z) \\ \overline{X} \vee Z(\overline{Z} \vee Y) \\ \hline X \end{array}$; д) $\begin{array}{|l} (X \wedge Y) \to Z\overline{\overline{Y}} \\ \overline{Z} \vee Y \\ \hline \overline{X} \vee \overline{Y} \end{array}$.

16. Ответьте на следующие вопросы: а) что можно утверждать о правильности двух аргументов, которые в формализованном виде выглядят одинаково; б) может ли правильный аргумент иметь ложное заключение; в) может ли неправильный аргумент иметь истинное заключение; г) что можно утверждать о заключении правильного аргумента, если все его посылки истинны; д) что можно утверждать о посылках правильного аргумента, если его заключение ложно; е) что можно утверждать об аргументе, все посылки которого истинны, а заключение ложно?

17. Проверьте аргумент: «Если все посылки истинны и аргумент — правильный, то заключение истинно. Заключение ложно. Следовательно, аргумент неправильный или не все посылки истинны».

18. Ученику на экзамене нужно было доказать, что последовательность, заданная формулой общего члена, является арифметической прогрессией. Он рассуждал так: «Если последовательность — арифметическая прогрессия, то $a_n=(a_{n-1}+a_{n+1})/2$. Проверка показала, что для данной последовательности это равенство выполняется. Следовательно, данная последовательность — арифметическая прогрессия». Правильно ли это рассуждение?

19. Можно ли на основании теоремы «Если четырехугольник описан около окружности, то суммы длин его противоположных сторон равны» утверждать, что в ромб можно вписать окружность?

20. Считая утверждения «В хоккей играют настоящие мужчины» и «Трус не играет в хоккей» посылкой и заключением правильного аргумента, сформулируйте подразумеваемую вторую посылку. Проверьте правильность полученного аргумента.

21. Докажите, что аргумент — неправильный тогда и только тогда, когда существует такой набор значений переменных, при котором все формулы, соответствующие посылкам, принимают значение *и*, а формула, соответствующая заключению, — значение *л*.

3⁰. Сокращенный способ проверки аргументов. Результатом упр. 21 удобно пользоваться для проверки аргументов, особенно в тех случаях, когда посылки сложны или число их велико. Как это делается, покажем на примерах..

Рассмотрим аргументы: «Если курс логики нетруден, то он полезен. Курс логики неинтересен или этот курс бесполезен. Курс логики интересен. Следовательно, этот курс труден». В формализованном виде этот аргумент выглядит так:

$$\begin{array}{|l} \overline{X}\to Y \\ \overline{Z}\vee\overline{Y} \\ Z \\ \hline X \end{array}$$

Допустим, что аргумент неправильный, т. е. существует набор X', Y', Z' значений переменных X, Y и Z такой, что все формулы, соответствующие посылкам, принимают значение *и*, а формула, соответствующая заключению, — значение *л*. Для удобства зафиксируем наше допущение, а затем следствия из него в таблице:

№	*и*	*л*
1	$\overline{X}' \to Y'$	X'
2	$\overline{Z}' \vee \overline{Y}'$	
3	Z'	
4	$\overline{X}'$	
5	Y'	
6		$\overline{Y}'$
7	$\overline{Z}'$	Z'
8		

Разъясним, как заполнены 4—8-я строки таблицы. Ложность X' (1-я строка) влечет истинность $\overline{X}'$ (4-я строка); истинность $\overline{X}' \to Y'$ (1-я строка) вместе с истинностью $\overline{X}'$ (4-я строка) влекут истинность Y' (5-я строка), откуда $\overline{Y}'$ — ложь (6-я строка); ложность $\overline{Y}'$ вместе с истинностью $\overline{Z}' \vee \overline{Y}'$ (2-я строка) влекут истинность $\overline{Z}'$ (7-я строка), откуда Z' — ложь (8-я строка). Получили противоречие (Z' — одновременно истина и ложь), доказывающее, что первоначальное допущение ложно, т. е. данный аргумент — правильный.

Если аргумент — неправильный, то, рассуждая подобным образом, получим набор значений переменных, при котором формулы, соответствующие посылкам, принимают значения *и*, а формула, соответствующая заключению, — значение *л*.

Пусть, например, нужно проверить аргумент вида

$$\left| \begin{array}{l} X \to (Y \vee Z) \\ \overline{Y} \vee Z \\ \hline XY \vee Z \end{array} \right. .$$

Запишем в таблицу допущение об истинности посылок и ложности заключения, а также следствия из этого допущения:

№	и	л
1 2 3	$X' \to (Y' \vee Z')$ $\overline{Y}' \vee Z'$	 $X'Y' \vee Z'$
4 5 6 7 8	 $\overline{Y}'$ (2; 5) X' (1; 5; 6)	$X'Y'$(3) Z'(3) Y'(6)

(В скобках помещены номера строк, из которых получено следствие.) Из таблицы видно, что нашелся такой набор значений переменных *и*, *л*, *л* соответственно для X', Y', Z', при котором все формулы-посылки принимают значение *и*, а формула-заключение — значение *л* (проверьте!). Следовательно, аргумент — неправильный. Этот способ проверки аргументов называют иногда «сокращенным способом» или «способом обратного рассуждения».

УПРАЖНЕНИЯ

22. Проверьте аргументы сокращенным способом.

а) «Если Петр поедет в Свердловск, то Иван поедет в Киев. Петр поедет в Свердловск или в Челябинск. Если Петр поедет в Челябинск, то Анна останется в Москве. Но Анна не останется в Москве. Следовательно, Иван поедет в Киев».

б) «Если сегодня вечером будет мороз, то я пойду на каток. Если завтра будет оттепель, то я пойду в музей. Сегодня вечером будет мороз или завтра будет оттепель. Следовательно, я пойду на каток и в музей».

в) «Галя и Борис — ровесники или Галя старше Бориса. Если Галя и Борис — ровесники, то Оля и Борис — разного возраста. Если Галя старше Бориса, то Борис старше Коли. Следовательно, Оля и Борис — разного возраста или Борис старше Коли».

г) Для того чтобы быть допущенным к экзаменам, необходимо получить зачет по логике. Я получу этот зачет, если научусь проверять аргументы сокращенным способом. Я не усвоил этот способ. Следовательно, я не буду допущен к экзаменам».

д) «Для того чтобы сдать экзамен, мне необходимо достать учебник или конспект. Я достану учебник только в том случае, если мой приятель не уедет. Он уедет, только если я достану конспект. Значит, я сдам экзамен».

23. В спортивном клубе города N действуют следующие правила: тот, кто не состоит в шахматной секции, не может быть членом сек-

ции плавания; каждый член шахматной секции должен заниматься в секциях плавания и спортивной гимнастики. Обязан ли член клуба заниматься в секции спортивной гимнастики, если он состоит в секции плавания?

§ 6. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

1°. Составление формул по заданным таблицам истинности. Известно, что для каждой формулы логики высказываний можно составить таблицу истинности. А можно ли по заданной таблице истинности найти формулу, ей соответствующую? Оказывается, эта задача тоже всегда разрешима.

Пусть, например, дана таблица истинности некоторой, неизвестной пока формулы F, содержащей переменные X, Y и Z:

X	Y	Z	$F(X, Y, Z)$
и	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*
л	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*
л	*л*	*л*	*и*

Выделим строки, соответствующие значениям *и* искомой формулы; таких строк — три: 1, 4 и 8-я.

Составим для каждой из выделенных строк конъюнкцию переменных или их отрицаний так, чтобы наборам значений переменных, представленным в этих строках, соответствовали истинные конъюнкции (для этого достаточно переменные, под которыми в соответствующей строке стоит буква *л*, взять со знаком отрицания, а переменные над буквой *и* — без отрицания). В результате получим конъюнкции: XYZ — для 1-й строки, $X\overline{Y}\overline{Z}$ — для 4-й строки, $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ — для 8-й строки. Дизъюнкция этих конъюнкций и есть искомая формула:

$$XYZ \vee X\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} \equiv F(X, Y, Z).$$

Убедимся, что это действительно так: если формула F истинна, то и дизъюнкция $XYZ \vee X\overline{Y}\overline{Z} \vee \overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ истинна, так как истинна одна из составляющих ее конъюнкций;

если формула F ложна, то ложна и дизъюнкция $XYZ\vee$ $\vee X\overline{Y}\overline{Z}\vee\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$, так как каждая из составляющих ее конъюнкций ложна.

Подобным образом можно составить формулу для всякой таблицы истинности, в последнем столбце которой имеется хотя бы одна буква *и*. Очевидно, что одну и ту же таблицу истинности имеет множество равносильных формул. Формула, которая получается в результате применения описанного способа, называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (с. д. н. ф.) всех формул с теми же переменными, ей равносильных.

Так как для любой формулы можно составить таблицу истинности, и притом единственную, то всякая формула, не являющаяся тождественно ложной, имеет с. д. н. ф., и притом единственную.

Формулу, соответствующую данной таблице, можно составить и другим способом, а именно: 1) выделить те строки таблицы, в которых искомая формула принимает значение *л*; 2) для каждой из выделенных строк составить дизъюнкцию переменных или их отрицаний так, чтобы каждая переменная (со знаком отрицания либо без него) вошла в дизъюнкцию один и только один раз и чтобы наборам значений переменных, записанных в этих строках, соответствовали ложные дизъюнкции; 3) составить из полученных дизъюнкций конъюнкцию.

В результате для данной таблицы получится формула

$$(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee Z)(\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z})(X\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})(X\vee\overline{Y}\vee Z)\wedge$$
$$\wedge(X\vee Y\vee\overline{Z}),$$

называемая *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (с. к. н. ф.) всех формул, соответствующих этой таблице. Каждая формула, не являющаяся тавтологией, имеет с. к. н. ф., и притом единственную.

Таким образом, все множества равносильных формул с одними и теми же переменными, не являющихся тавтологиями или тождественно ложными формулами, имеют по два «представителя» стандартного вида: с. д. н. ф. и с. к. н. ф. Множества тавтологий и тождественно ложных формул имеют по одному «представителю» стандартного вида — соответственно с. д. н. ф. и с. к. н. ф.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Составьте формулы, соответствующие данным таблицам истинности (выберите рациональный способ). Упростите полученные формулы:

X	Y	Z	F_1	F_2
и	*и*	*и*	*и*	*л*
и	*и*	*л*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*и*	*л*
л	*и*	*л*	*и*	*л*
л	*л*	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*л*	*и*	*и*

2. Для каждой из данных формул найдите ее с. д. н. ф. и с. к. н. ф.: а) $X \to Y$; б) $X \leftarrow\to Y$; в) $(X \leftarrow\to Y) \wedge \overline{XZ}$; г) $(X \to Y)(Y \to Z) \wedge \wedge (X \vee \overline{Y}) \to Z$.

3. Напишите совершенную нормальную форму, представляющую множество: а) тавтологий с переменными X и Y; б) тавтологий с переменными X, Y и Z; в) тождественно ложных формул с переменными X, Y и Z.

4. Составьте всевозможные таблицы истинности для формул с двумя переменными X и Y. Выпишите с. д. н. ф. и с. к. н. ф. формул, соответствующих этим таблицам.

5. Докажите, что число попарно неравносильных формул с переменными $X_1, X_2, \ldots, X_n$ равно $2^{(2^n)}$.

6. Один логик попал в плен к дикарям и был заключен в пещеру, имеющую два выхода. Вождь дикарей предложил логику следующий шанс на спасение: «Один выход ведет на свободу, другой — на верную смерть. Ты можешь выбрать любой. Сделать выбор тебе помогут два моих воина, одному из которых ты можешь задать единственный вопрос. Но предупреждаю тебя, что один из этих воинов всегда говорит правду, а другой всегда лжет». После недолгого размышления логик задал вопрос, ответ на который позволил ему безошибочно выбрать выход, ведущий на свободу. Что это был за вопрос?

2°. Нормальные формы. Приведение формул к совершенным нормальным формам с помощью равносильных преобразований. Пользуясь известными законами логики, всякую формулу можно преобразовать в равносильную ей формулу вида $C_1 \vee C_2 \ldots \vee C_m$, где $m \geqslant 1$ и каждое C_i — либо переменная, либо ее отрицание, либо конъюнкция переменных или их отрицаний. Формула такого вида называется *дизъюнктивной нормальной формой* (д. н. ф.) данной формулы.

Примеры.

1. $X \to Y \equiv \bar{X} \vee Y$. 2. $X(Y \vee Z) \equiv XY \vee XZ$.

3. $X \leftrightarrow Y \equiv XY \vee \bar{X}\bar{Y}$.

4. $(X \vee Y) \to Z \equiv \overline{X \vee Y} \vee Z \equiv \bar{X}\,\bar{Y} \vee Z$.

5. $X \wedge \overline{X \vee Y} \equiv X\bar{X}\,\bar{Y}$.

6. $\overline{\bar{X} \vee Y} \wedge (\bar{Z} \to X) \equiv X\bar{Y}(Z \vee X) \equiv X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y}$

Каждая формула имеет не одну, а бесконечное множество дизъюнктивных нормальных форм. Например, для формулы $\overline{\bar{X} \vee Y} \wedge (\bar{Z} \to X)$ д. н. ф. является не только формула $X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y}$, но и равносильные ей формулы $X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y} \vee X\bar{Y}$, $X\bar{Y}Z \vee XX\bar{Y}$, $X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y} \vee Z\bar{Z}$, $X\bar{Y}$ и др.

Из д. н. ф. любой данной формулы $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ легко получить ее с. д. н. ф. Прежде чем показать, как это делается, отметим характерные признаки с. д. н. ф.: 1) *различны все члены дизъюнкции;* 2) *различны все члены каждой конъюнкции;* 3) *ни одна конъюнкция не содержит одновременно переменную и отрицание этой переменной;* 4) *каждая конъюнкция содержит все переменные, входящие в формулу F, т. е. имеет вид* $X_1^{\alpha} \wedge X_2^{\alpha} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha}$, *где* X_i^{α} — *либо* X_i, *либо* $\bar{X}_i$.

Вернемся к формуле $\overline{\bar{X} \vee Y} \wedge (\bar{Z} \to X)$ и ее д. н. ф. $X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y}$. Формула $X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y}$ удовлетворяет первым трем требованиям, предъявляемым к с. д. н. ф. (проверьте!), но не удовлетворяет четвертому требованию: второй ее член не содержит переменной Z. Произведем следующие равносильные преобразования:

$$X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y} \equiv X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y}(Z \vee \bar{Z}) \equiv X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y}\bar{Z};$$

вычеркнув один из повторяющихся членов, получим формулу $X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y}\bar{Z}$, равносильную формуле $\overline{\bar{X} \vee Y} \wedge (\bar{Z} \to X)$ и являющуюся ее с. д. н. ф.

Сформулируем общее п р а в и л о. *Для того чтобы привести формулу* $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, *не являющуюся тождественно ложной, к с. д. н. ф., достаточно:*

1) *привести ее к какой-нибудь д. н. ф.;*

2) *удалить члены дизъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся);*

3) *из одинаковых членов дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;*

4) *из одинаковых членов каждой конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;*

5) *если в какой-нибудь конъюнкции не содержится переменной X_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, добавить к этой конъюнкции член $X_i \vee \overline{X}_i$ и применить закон распределительности конъюнкции относительно дизъюнкции;*

6) *если в полученной дизъюнкции окажутся одинаковые члены, воспользоваться предписанием из п. 3.*

Полученная формула и является с. д. н. ф. данной формулы.

Всякую формулу можно преобразовать в равносильную формулу вида $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_m$, где $m \geqslant 1$ и каждое D_i — либо переменная, либо ее отрицание, либо дизъюнкция переменных или их отрицаний. Формула такого вида называется *конъюнктивной нормальной формой* (к. н. ф.) данной формулы.

Примеры.

$$1.\ \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} \equiv X \wedge Y. \quad 2.\ X \vee YZ \equiv (X \vee Y)(X \vee Z).$$

$$3.\ X \leftrightarrow Y \equiv (\overline{X} \vee Y)(X \vee \overline{Y}). \quad 4.\ X \rightarrow Y \equiv \overline{X} \vee Y.$$

$$5.\ (X \vee Y) \rightarrow Z \equiv \overline{X \vee Y} \vee Z \equiv \overline{X}\overline{Y} \vee Z \equiv (\overline{X} \vee Z)(\overline{Y} \vee Z).$$

$$6.\ \overline{\overline{X} \vee Y} \wedge (\overline{Z} \rightarrow X) \equiv X\overline{Y}(Z \vee X) \equiv X\overline{Y}Z \vee X\overline{Y} \equiv$$

$$\equiv (X\overline{Y} \vee X)(X\overline{Y} \vee \overline{Y})(X\overline{Y} \vee Z) \equiv (X \vee X)(X \vee \overline{Y}) \wedge$$

$$\wedge (\overline{Y} \vee X)(\overline{Y} \vee \overline{Y})(Z \vee X)(Z \vee \overline{Y}).$$

Очевидно, что каждая формула имеет бесконечное множество конъюнктивных нормальных форм. Если формула не является тавтологией, то среди ее к. н. ф. есть с. к. н. ф., характеризуемая следующей совокупностью свойств: 1) *различны все члены конъюнкции;* 2) *различны все члены каждой дизъюнкции;* 3) *ни одна дизъюнкция не содержит переменную вместе с отрицанием этой переменной;* 4) *каждая дизъюнкция содержит все переменные, входящие в исходную формулу.*

Правило приведения формулы к с. к. н. ф. без помощи таблицы истинности аналогично правилу приведения к с. д. н. ф.

Пример. Приведем к с. к. н. ф. формулу $\overline{XYZ}\wedge(XY\to X\overline{Y}\overline{Z})$.

1) Приведем данную формулу к какой-нибудь к. н. ф.:

$$\overline{XYZ}\wedge(XY\to X\overline{Y}\overline{Z})\equiv(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})(\overline{XY}\vee X\overline{Y}\overline{Z})\equiv$$

$$\equiv(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee X\overline{Y}\overline{Z})\equiv$$

$$\equiv(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee X)(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Y})(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}).$$

Удалим:

2) члены конъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием;

3) повторяющиеся члены конъюнкции, кроме одного;

4) повторяющиеся члены дизъюнкций, кроме одного.

В результате получим $(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})(\overline{X}\vee\overline{Y})$.

5) Дополним член конъюнкции, не содержащий переменной Z, конъюнкцией $Z\overline{Z}$ и применим закон распределительности дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee Z\overline{Z})\equiv(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})\wedge$$

$$\wedge(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee Z)(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}).$$

6) Из одинаковых членов полученной конъюнкции оставим один, удалив остальные; получим формулу $\overline{X}(\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee Z)$, являющуюся с. к. н. ф. данной формулы.

УПРАЖНЕНИЯ

7. Установите, какие из данных формул являются д. н. ф.; с. д. н. ф.; к. н. ф.; с. к. н. ф. формул с переменными X, Y и Z: а) $XY\vee XZ$; б) $XYZ\vee\overline{X}YZ$; в) $(X\vee Y)(\overline{X}\vee Z)$; г) $X\vee Y\vee Z$; д) $X\overline{Y}Z$; е) $\overline{XYZ}\vee XYZ$; ж) $(X\vee Y)(X\vee\overline{Y})(\overline{X}\vee Y)$.

8. Объясните, почему каждое из преобразований, предписываемых п. 2—6 правила приведения к с. д. н. ф. (см. с. 56), — равносильное.

9. Приведение формулы $\overline{XYZ}\wedge(XY\to X\overline{Y}\overline{Z})$ к с. к. н. ф., описанное на с. 57, запишите в виде цепочки равносильных преобразований. Объясните, на чем основано каждое преобразование.

10. Приведите следующие формулы к с. д. н. ф. с помощью равносильных преобразований: а) $(X\vee Y)(X\vee\overline{Y})$; б) $\overline{\overline{X}\vee\overline{Y}}\vee X\overline{Y}$; в) $XYZ\vee X\overline{Y}$; г) $X(\overline{Y}\vee Z)$; д) $(X\vee Y\vee Z)(\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z})$; е) $(X\to Z)XY$.

11. Приведите следующие формулы к с. к. н. ф. с помощью равносильных преобразований: а) $X\vee Y\overline{Y}$; б) $XY\vee\overline{X}\overline{Y}$; в) $XYZ\vee\overline{\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}}$; г) $X(\overline{X}\vee\overline{Y})$; д) $XY\overline{Z}\vee\overline{X}\overline{Y}$; е) $(X\leftrightarrow Y)\wedge\overline{XZ}$.

12. Установите, какие формулы в упр. 10 и 11 равносильны, сравнив их совершенные нормальные формы.

13. Докажите, что формула является тавтологией тогда и только тогда, когда каждый член ее к. н. ф. содержит хотя бы одну переменную вместе с ее отрицанием.

14. Установите, какие из данных формул являются тавтологиями, приведя их к к. н. ф.: а) $(X\leftrightarrow Y)\vee(\overline{X}Z\rightarrow Y)$; б) $((X\rightarrow Y)(Y\rightarrow Z)\wedge \wedge(X\vee\overline{Y}))\rightarrow Z$; в) $\overline{X\vee Y}\rightarrow(XZ\vee\overline{Y})$.

15. Докажите, что формула является тождественно ложной тогда и только тогда, когда каждый член ее д. н. ф. содержит хотя бы одну переменную вместе с ее отрицанием.

3⁰. Получение следствий из данных посылок. Вы знаете, как проверить, следует ли в логике высказываний некоторое предложение из других данных предложений.

Используя с. к. н. ф., мы сможем решить задачу о нахождении всех следствий из данных посылок. Эта задача ставится и решается также на уровне логики высказываний, т. е. при условии, что элементарные высказывания рассматриваются как нерасчленяемые. Имеются в виду следствия, содержащие только те элементарные высказывания, которые входят в посылки. Дадим сначала решение задачи, а потом — его обоснование.

Чтобы получить всевозможные (неравносильные) следствия из данных посылок*, можно применить такое правило: 1) *составить конъюнкцию формализованных посылок*; 2) *привести конъюнкцию формализованных посылок к с. к. н. ф.*; 3) *выписать все члены этой с. к. н. ф., а также всевозможные конъюнкции этих членов. Полученное множество формул и является искомым.*

Пример. Найдем все следствия из посылок X и $X\leftrightarrow Y$.

1) $X\wedge(X\leftrightarrow Y)$;

2) $X\wedge(X\leftrightarrow Y)\equiv X\wedge(\overline{X}\vee Y)\wedge(X\vee\overline{Y})\equiv$
$\equiv(X\vee Y\overline{Y})(\overline{X}\vee Y)(X\vee\overline{Y})\equiv(X\vee Y)(X\vee\overline{Y})\wedge$
$\wedge(\overline{X}\vee Y)(X\vee\overline{Y})\equiv(X\vee Y)(X\vee\overline{Y})(\overline{X}\vee Y)$;

3) формулы $X\vee Y$, $X\vee\overline{Y}$, $\overline{X}\vee Y$, $(X\vee Y)(X\vee\overline{Y})$, $(X\vee Y)(\overline{X}\vee Y)$, $(X\vee\overline{Y})(\overline{X}\vee Y)$, $(X\vee Y)(X\vee\overline{Y})(\overline{X}\vee Y)$ являются всевозможными следствиями из данных посылок.

* За исключением тождественно истинной формулы; в дальнейшем эта оговорка и оговорка о неравносильности следствий будут подразумеваться.

Докажем теперь, что: 1) каждая формула, полученная с помощью указанного правила, действительно следует из данных посылок; 2) любая не тождественно истинная формула, не равносильная ни одной из полученных, не следует из данных посылок.

Доказательство. 1) Истинность первого утверждения почти очевидна: конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда все ее члены истинны; следовательно, невозможен случай, когда с. к. н. ф. конъюнкции посылок истинна, а какие-нибудь члены этой с. к. н. ф. или их конъюнкции ложны, что и доказывает их следование из данных посылок.

2) Пусть $F_1(X_1, X_2,..., X_n)$ — формула, с. к. н. ф. которой содержит член F_2, отличный от всех дизъюнкций, составляющих с. к. н. ф. конъюнкции $F(X_1, X_2,..., X_n)$ посылок. Утверждение, что F_1 не следует из F, истинно, если существует такой набор значений переменных, при котором формула F истинна, а формула F_1 ложна (для иллюстрации доказательства возьмем, например, формулы $(X\vee Y)(X\vee\bar{Y})(\bar{X}\vee\bar{Y})$, $(X\vee Y)(\bar{X}\vee Y)$ и $\bar{X}\vee Y$ соответственно в качестве F, F_1 и F_2.

Дизъюнкцию F_2, входящую в формулу F_1 и отличную от всех дизъюнкций, входящих в формулу F, всегда можно сделать ложной, приписав переменным, входящим в эту дизъюнкцию без знака отрицания, значение *л*, а переменным под знаком отрицания — значение *и* (в нашем примере* $\bar{X'}\vee Y'\equiv л$ при $X'\equiv и$ и $Y'\equiv л$). Формула F_1 при этом также примет значение *л* (соответственно $(X\vee Y)\wedge л\equiv л$). Формула же F при этих значениях переменных примет значение *и*, так как каждая из составляющих ее дизъюнкций содержит хотя бы один член, являющийся отрицанием члена дизъюнкции F_2 (для рассматриваемого примера при $X'\equiv и$ и $Y'\equiv л$ имеем

$$(X'\vee Y')(X'\vee\bar{Y'})(\bar{X'}\vee\bar{Y'})\equiv(и\vee л)(и\vee и)(л\vee и)\equiv и).$$

Таким образом, всякая формула $F_1(X_1, X_2, ..., X_n)$, с. к. н. ф. которой содержит дизъюнкцию, не входящую в с. к. н. ф. формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$, являющейся конъюнкцией посылок, не следует из этих посылок.

Рассмотрим теперь задачу, в которой требуется найти не все следствия из данных посылок, а какое-нибудь

---

* Здесь X', Y' — фиксированные значения переменных.

одно, содержащее только некоторые заданные элементарные высказывания из числа входящих в посылки. Эту задачу можно решить с помощью с. д. н. ф. следующим способом:

1) составить объединенную таблицу истинности для формул, соответствующих посылкам;

2) выделить строки, в которых все посылки истинны;

3) в выделенных строках подчеркнуть значения переменных, которые должны войти в искомую формулу;

4) если какие-нибудь наборы этих значений повторяются, вычеркнуть лишние;

5) по оставшимся наборам составить с. д. н. ф. формулы, которая и является искомой (почему?).

Пример. Найдем следствие из посылок $\bar{X}\to Y$ и $\bar{Z}\to\bar{Y}$, содержащее только переменные X и Z.

1) Составляем объединенную таблицу истинности посылок:

X	Y	Z	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$	$\bar{X}\to Y$	$\bar{Z}\to\bar{Y}$	
$\underline{\text{и}}$	и	$\underline{\text{и}}$	л	л	л	и	и	1
и	и	л	л	л	и	и	л	
$\underline{\text{и}}$	л	$\underline{\text{и}}$	л	и	л	и	и	3
$\underline{\text{и}}$	л	$\underline{\text{л}}$	л	и	и	и	и	4
$\underline{\text{л}}$	и	$\underline{\text{и}}$	и	л	л	и	и	5
л	и	л	и	л	и	и	л	
л	л	и	и	и	л	л	и	
л	л	л	и	и	и	л	и	

2) Цифрами помечаем строки, в которых обе посылки истинны.

3) Подчеркиваем в отмеченных строках значения переменных X и Z.

4) Вычеркиваем один из дважды встречающихся в отмеченных строках наборов *и*, *и* значений переменных X и Z.

5) По оставшимся в отмеченных строках наборам значений X и Z составляем с. д. н. ф., искомой формулы: $XZ\vee X\bar{Z}\vee\bar{X}Z$. Упростим полученную формулу:

$$XZ \vee X\bar{Z} \vee \bar{X}Z \equiv (XZ \vee X\bar{Z}) \vee (XZ \vee \bar{X}Z) \equiv X \vee Z.$$

Если посылки даны в виде содержательных предложений, то нужно: формализовать их; найти формулу искомого заключения; перейти от формулы заключения к его содержательной форме.

УПРАЖНЕНИЯ

16. Найдите все следствия из посылок: а) $X \rightarrow Y$ и $\overline{Y}$; б) $X \rightarrow Y$, $Y \vee Z$ и $XY \leftrightarrow Z$; в) $X \leftrightarrow Y$ и $Y \leftrightarrow Z$; г) $(X \wedge Y) \rightarrow \overline{Z}$, Y и Z.

17. Найдите все следствия из посылок: «Если данное число делится на 2 и на 5, то оно делится на 10»; «Данное число делится на 2 или не делится на 5». Выразите полученные следствия в содержательной форме.

18. Найдите все следствия из посылок: а) «Если последняя цифра целого числа n обозначает четное число, то это целое число делится на 2 или на 4»; б) «Если целое число n делится на 4, то оно делится на 2». Выразите полученные следствия в содержательной форме.

19. Найдите следствие из посылок $\overline{X}Y \vee Z$, $\overline{XY}$ и $Y \rightarrow (X \vee \overline{Z})$, содержащее только переменные: а) X и Z, б) Y и Z.

20. Найдите следствие из посылок $X_1 \vee X_2$, $X_1 \rightarrow X_3$, $X_2 \leftrightarrow X_4$, содержащее только: а) X_1 и X_4; б) X_2, X_3 и X_4.

21. Докажите, что описанный выше способ получения следствия, содержащего только заданные элементарные высказывания, дает самое сильное из таких следствий (т. е. все остальные следуют из него).

22. Для каждого из следствий, полученных в упр. 19 и 20, напишите формулу с теми же переменными, которая из него следует, но не равносильна ему.

23. Даны посылки: «Если данный четырехугольник — ромб, то его диагонали перпендикулярны»: «Если данный четырехугольник — квадрат, то его диагонали конгруэнтны»; «Если диагонали данного четырехугольника не конгруэнтны, то он не квадрат»; «Диагонали данного четырехугольника не перпендикулярны и конгруэнтны».

Найдите следствие, состоящее из высказываний: а) «Данный четырехугольник — ромб» и «Данный четырехугольник — квадрат»; б) «Данный четырехугольник — ромб» и «Диагонали данного четырехугольника конгруэнтны».

§ 7. ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ

1°. Описание переключательных схем с помощью формул логики высказываний. Переключательная схема — это устройство из переключателей (контактов) и проводов, связывающих два полюса — вход и выход. (Полюсов может быть и больше, но мы ограничимся рассмотрением двухполюсных схем.) Для конкретности будем говорить о переключательных схемах, представляющих собой участок электрической цепи, по которому проходит ток от источника A к потребителю B (например, к лампочке). Между источником и потребителем может быть замыкающий и размыкающий цепь контакт либо несколько контактов, соединенных последовательно или параллельно.

Рассмотрим схему с одним контактом (рис. 3). Цепь замкнута (лампочка горит) в том и только в том случае, если контакт замкнут.

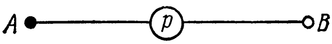

Рис. 3

Рис. 4

Сопоставим контакту p переменную X, а двум состояниям контакта «замкнут», «разомкнут» — соответственно значения *и* и *л* переменной X. Условимся также обозначать утверждение «цепь замкнута» через *и*, а утверждение «цепь разомкнута» — через *л*; тогда формула X опишет работу данной цепи:

p	X	Цепь
Замкн.	*и*	Замкн.
Разомкн.	*л*	Разомкн.

Если между источником и потребителем тока поместить два контакта p_1 и p_2 (рис. 4), соединенные последовательно, то цепь замкнута, когда оба контакта замкнуты, и разомкнута, когда хотя бы один из них разомкнут. Конъюнкция переменных X_1 и X_2, поставленных в соответствие контактам p_1 и p_2, истинна, когда обе переменные принимают значение *и*, и ложна, когда хотя бы одна из них принимает значение *л*. Таким образом, формула $X_1 \wedge X_2$ соответствует схеме на рис. 4.

Очевидно, что формула $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n$ описывает схему с n последовательно соединенными контактами.

Если контакты p_1 и p_2 соединены параллельно (рис. 5), то цепь замкнута, когда хотя бы один из контактов замкнут, и разомкнута, когда оба они разомкнуты. Такой схеме соответствует формула $X_1 \vee X_2$, являющаяся истинной, когда хотя бы одна из переменных принимает значение *и*, и ложной, когда обе переменные принимают значение *л*.

Легко видеть, что дизъюнкция $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$ описывает работу цепи с n параллельно соединенными контактами.

Контакты не всегда независимы друг от друга. Можно устроить их так, чтобы они замыкались и размыка-

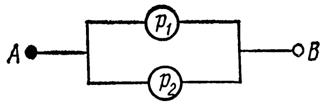

Рис. 5

лись одновременно, либо так, чтобы один из них размыкался, когда другой замыкается, и наоборот. В первом случае контакты называются *идентичными*, во втором — *инверсными*. Идентичные контакты обозначают одинаково; контакт, инверсный контакту p, будем обозначать через $\bar{p}$. Если контакту p поставить в соответствие переменную X, то очевидно, что контакту $\bar{p}$ будет соответствовать формула $\bar{X}$: когда переменная X принимает значение *и* (контакт p замкнут), формула $\bar{X}$ принимает значение *л* (контакт $\bar{p}$ разомкнут), и наоборот.

Установленные соответствия дают возможность описать любую цепь с последовательно или параллельно соединенными контактами формулой логики высказываний. С другой стороны, любую формулу логики высказываний можно смоделировать в виде переключательной схемы. (Напомним, что любая формула может быть приведена к форме, не содержащей символов $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$.)

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для каждой из схем, изображенных на рис. 6, составьте соответствующую ей формулу.

2. Начертите схемы, соответствующие формулам: а) $(X \vee Y) Z \vee \vee \bar{X} Y$; б) $(X \rightarrow Y) \vee X$; в) $(X \leftrightarrow Y) Z$.

2⁰. Анализ, упрощение и синтез переключательных схем. Чтобы изучить свойства переключательной схемы, выявить ее возможности и особенности, достаточно рассмотреть соответствующую этой схеме формулу. Так, например, схеме на рис. 7 соответствует формула F: $X_1(X_3 \vee \bar{X}_2) \vee X_2(X_3 \vee \bar{X}_1)$.

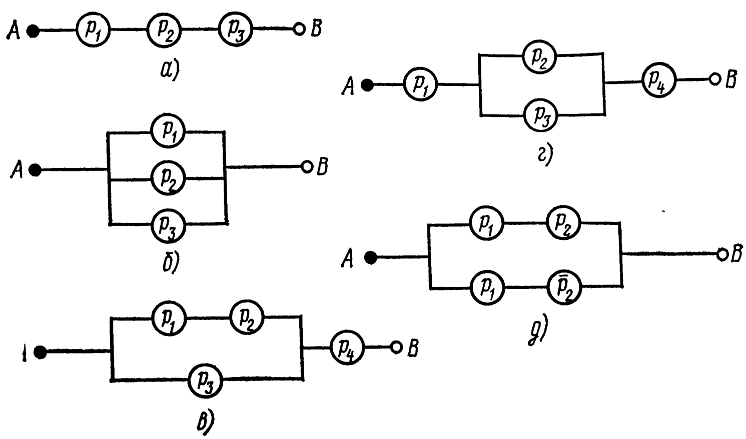

Рис. 6

Составим для этой формулы таблицу истинности:

X_1	X_2	X_3	F
и	и	и	и
и	и	л	л
и	л	и	и
и	л	л	и
л	и	и	и
л	и	л	и
л	л	и	л
л	л	л	л

Из таблицы видно, что цепь замкнута в пяти случаях из восьми возможных: когда замкнуты все три контакта, только p_1 и p_3, только p_1, только p_2 и p_3, только p_2.

Произведя равносильные преобразования:

$$X_1(X_3 \vee \overline{X}_2) \vee X_2(X_3 \vee \overline{X}_1) \equiv \equiv X_1X_3 \vee X_1\overline{X}_2 \vee X_2X_3 \vee \vee \overline{X}_1X_2 \equiv X_3(X_1 \vee X_2) \vee \vee X_1\overline{X}_2 \vee \overline{X}_1X_2,$$

видим, что один из идентичных переключателей, например p_3, лишний.

Мы провели а н а л и з данной схемы, который выявил условия, при которых цепь замкнута, и обнаружил возможность ее упрощения, т. е. замены схемой с теми же свойствами, но с меньшим числом контактов.

Анализ схемы на рис. 6, *д*, которой соответствует формула $X_1X_2 \vee X_1\overline{X}_2$, показывает, что ее можно упростить весьма существенно, заменив схемой с одним переключателем (см. рис. 3).

Советский математик О. Б. Лупанов установил, что любую схему, соответствующую формуле с n переменными, всегда можно упростить так, что число контактов в ней не превысит $2^n/n$.

Решим теперь такую задачу: построить цепь с тремя независимыми контактами, которая проводит ток тогда и только тогда, когда замкнуты ровно два контакта.

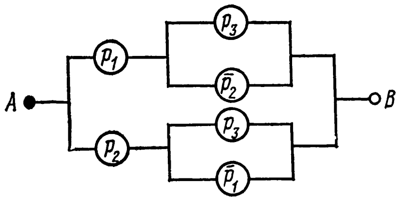

Рис. 7

Формула $F(X_1, X_2, X_3)$, соответствующая искомой схеме, принимает значение *и* тогда и только тогда, когда это значение принимают две из трех переменных X_1, X_2 и X_3. Напишем с. д. н. ф. формулы F: $X_1X_2\bar{X}_3 \vee \bar{X}_1X_2X_3 \vee \vee X_1\bar{X}_2X_3$. Построим схему, соответствующую этой формуле (рис. 8).

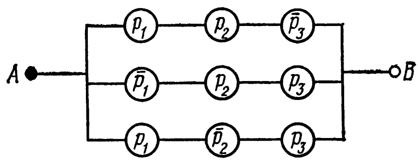

Рис. 8

В задаче использован общий метод построения (**синтеза**) переключательной схемы по заданным ее свойствам.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Составьте формулу, соответствующую схеме на рис. 9. С помощью таблицы истинности сформулируйте условия, при которых цепь замкнута.

4. Составьте формулу, соответствующую схеме на рис. 10. Упростите схему.

5. Постройте простейшую схему, условия работы которой заданы следующей таблицей:

X_1	X_2	X_3	F
и	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*и*
и	*л*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*
л	*и*	*л*	*и*
л	*л*	*и*	*и*
л	*л*	*л*	*и*

6. Составьте схему цепи с тремя независимыми контактами, которая замкнута тогда и только тогда, когда: а) замкнуты по меньшей мере два контакта; б) замкнуты не более чем два контакта; в) разомкнут только один контакт.

7. Как работают схемы, соответствующие: а) тождественно истинным формулам; б) тождественно ложным формулам? Приведите примеры.

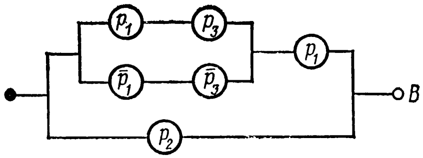

Рис. 9

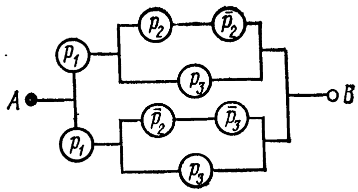

Рис. 10

8. Машина-экзаменатор дает сигнал «зачет» (зажигается лампочка) в том и только в том случае, если экзаменующийся ответил правильно хотя бы на два из трех вопросов билета. При вводе в машину правильного ответа замыкается контакт в цепи сигнальной лампочки. Постройте схему этой цепи.

9. Комитет, состоящий из трех человек, включая председателя, выносит решение большинством голосов, однако решение не может быть принято, если за него не проголосовал председатель. Голосование «за» производится поворотом ручки, замыкающей контакт, и в случае принятия решения зажигается лампочка. Постройте простейшую схему такой цепи.

10. Постройте схему, позволяющую включать и выключать в комнате верхний свет любым из трех выключателей, один из которых находится при входе в комнату, другой — над письменным столом, третий — над диваном.

11. Постройте схему цепи с шестью независимыми контактами P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, которая замкнута тогда и только тогда, когда замкнуты ровно три последовательных контакта.

§ 8. ПРЕДИКАТЫ И ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ

1°. Недостаточность логики высказываний. Средствами логики высказываний удается описывать и анализировать далеко не всякие рассуждения. Так, например, на языке логики высказываний мы не можем выразить тот факт, что из предложения «По меньшей мере один ученик решил все задачи» следует предложение «Каждую задачу решил по меньшей мере один ученик». Этим предложениям соответствуют элементарные формулы логики высказываний, импликация которых не является, очевидно, тавтологией.

Приведем другой пример аргумента, правильность которого нельзя обнаружить средствами логики высказываний. Пусть a, b, c — прямые на плоскости; тогда из посылок $a \| b$ и $b \| c$ следует заключение $a \| c$. Будучи формализован в логике высказываний, этот аргумент имеет вид $\begin{array}{|l} X \\ Y \\ \hline Z \end{array}$. Однако формула $XY \to Z$ не есть тавтология.

Дело в том, что правильность этих аргументов основана на связи между элементами внутренней структуры элементарных высказываний, которая логикой высказываний не учитывается.

Эти рассуждения, как и многие другие, могут быть описаны на языке л о г и к и п р е д и к а т о в, которая является расширением логики высказываний, т. е. вместе со всеми понятиями логики высказываний содержит ряд других понятий. С некоторыми из них вам предстоит познакомиться.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Установите, какие из следующих аргументов нельзя проверить средствами логики высказываний: а) «Валя старше Коли и Лиды. Следовательно, Валя старше Лиды»; б) «Валя старше Коли. Коля старше Лиды. Следовательно, Валя старше Лиды»; в) «Прямые a и b параллельны или пересекаются. Прямые a и b не параллельны. Следовательно, прямые a и b пересекаются»; г) «Всякие две прямые на плоскости параллельны или пересекаются. Не всякие две прямые на плоскости параллельны. Следовательно, всякие две прямые на плоскости пересекаются».

2^0. Предикаты и способы их задания. Рассмотрим высказывательную форму $\cos x = 1$. Каждому значению переменной x на множестве действительных чисел эта форма ставит в соответствие высказывание и тем самым одно из значений истинности (элемент множества $\{и;\ л\}$). Так, значению x, равному 0, соответствует истинное высказывание $\cos 0 = 1$; при $x = \pi$ получаем ложное высказывание $\cos \pi = 1$; значению x, равному 2π, соответствует истинное высказывание $\cos 2\pi = 1$. Вообще, всякому значению x, кратному 2π, соответствует истинное высказывание, а всем остальным значениям x соответствуют ложные высказывания.

Таким образом, данная высказывательная форма задает отображение множества $\mathbf{R}$ действительных чисел на множество $\{и;\ л\}$, иначе говоря, задает функцию с областью определения $\mathbf{R}$ и множеством значений $\{и;\ л\}$.

Функция, задаваемая на $\mathbf{R}$ высказывательной формой $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, всюду принимает значение *и*.

Высказывательная форма $|x|<0$ на любом числовом множестве задает функцию с единственным значением *л*.

Функция, все значения которой принадлежат множеству $\{и; л\}$, называется ***предикатом.***

Будем обозначать предикаты буквами P, Q, R или символами P_i, Q_i, R_i, где i — натуральное число. Под символом P_a будем понимать значение предиката P, соответствующее элементу a из его области определения.

Чаще всего предикаты задают высказывательными формами. Однако существуют и другие способы задания предикатов. Так, например, таблица

а	б	в	г	д
и	*л*	*л*	*и*	*и*

задает предикат на множестве {а; б; в; г; д}. Табличный способ задания пригоден только для предикатов, область определения которых — конечное множество.

Рассмотрим более подробно способ задания предикатов с помощью высказывательных форм. Пусть даны высказывательные формы:

а) $x>1$; б) $x>y$; в) $\frac{x}{y}+z=10$; г) $\frac{x}{y}+z+\sin x<0$.

(Положим для определенности, что все переменные в этих формах принимают значения из множества $\mathbf{R}$ действительных чисел.) Форма а) содержит одну переменную и называется *одноместной*; форма б) содержит две переменные x и y и называется *двуместной*; форма в) содержит три переменные x, y и z и называется *трехместной*; форма г) тоже трехместная. Вообще форму с n различными переменными называют *n-местной* формой. Высказывание будем считать нуль-местной высказывательной формой. Различные переменные принимают значения из разных множеств либо из одного и того же множества независимо друг от друга. Одинаковые переменные в одной и той же форме имеют одно и то же множество значений и одновременно принимают одинаковые значения.

Для дальнейшего удобно принять следующее соглашение: *если высказывательная форма, не содержащая знаков логических операций, при каком-нибудь наборе входящих в нее переменных теряет смысл, то будем считать, что этому набору соответствует значение л.*

Одноместная высказывательная форма задает предикат на множестве значений входящей в нее переменной.

Примеры. 1. Если переменная x в высказывательной форме «Река x впадает в Каспийское море» принимает значения из множества M названий всевозможных рек, то эта форма задает предикат P с областью определения M.

2. Пусть переменные в высказывательных формах $x>0$ и $y>0$ принимают значения из одного и того же числового множества, например из множества $\mathbf{R}$. Тогда эти формы задают на $\mathbf{R}$ один и тот же предикат Q_1.

3. Высказывательная форма $(y-1)/y<0$ задает на $\mathbf{R}$ предикат Q_2, причем $Q_2(0)=$ *л*.

Для рассмотрения вопроса о задании высказывательными формами n-местных предикатов (при $n>1$) нам понадобятся понятия «упорядоченная n-ка» и «декартово произведение множеств».

Будем называть *упорядоченной n-кой* («энкой») совокупность n не обязательно различных объектов вместе с заданным порядком их расположения. Если $n=2$, то n-ка называется *парой*; если $n=3$, то *тройкой* и т. д. Объекты, составляющие n-ку, называют ее *компонентами*. Будем записывать упорядоченную n-ку с помощью круглых скобок, внутри которых компоненты n-ки располагаются в заданном порядке. Две упорядоченные n-ки считаются *равными*, если их компоненты и порядок их расположения совпадают. Например, (2; 3) и (3; 2) — различные упорядоченные пары; $(a; b; b)$ и $(b; a; b)$ — различные упорядоченные тройки.

Для описания игры в шахматы каждой клетке шахматной доски ставится в соответствие пара, первая компонента которой есть элемент множества $M_1=\{a; b; c; d; e; f; g; h\}$, а вторая — элемент множества $M_2=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Множество таких пар называется *декартовым произведением* множеств M_1 и M_2 (взятых именно в таком порядке).

Вообще, *декартовым произведением* $M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$ *непустых множеств* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *называется множество всевозможных упорядоченных*

n-ок, первая компонента каждой из которых принадлежит M_1, вторая — M_2 и т. д.

Для декартова произведения n равных множеств M введем сокращенное обозначение M^n; при $n=2$ и $n=3$ соответственно получим $M\times M=M^2$ и $M\times M\times M=M^3$.

Рассмотрим двуместную высказывательную форму $x<y$; пусть x принимает значения из множества $M_x=\{1; 2; 3\}$, а y — из множества $M_y=\{2; 4\}$. Эта форма задает два предиката P_1 и P_2 соответственно на множествах $M_x\times M_y$ и $M_y\times M_x$:

$(x; y)$	$x<y$	$P_1((x, y))$	$(y; x)$	$x<y$	$P_2((y, x))$
(1; 2)	1<2	*и*	(2; 1)	1<2	*и*
(1; 4)	1<4	*и*	(2; 2)	2<2	*л*
(2; 2)	2<2	*л*	(2; 3)	3<2	*л*
(2; 4)	2<4	*и*	(4; 1)	1<4	*л*
(3; 2)	3<2	*л*	(4; 2)	2<4	*и*
(3; 4)	3<4	*и*	(4; 3)	3<4	*и*

Таким образом, двуместная высказывательная форма определяет, вообще говоря, два различных предиката.

Для того чтобы с помощью высказывательной формы с более чем одной переменной задать предикат однозначно, достаточно выбрать и указать для переменных какой-либо порядок. Если для переменных высказывательной формы $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ выбран порядок $(x_{i_1}; x_{i_2}; ...; x_{i_n})$ и $M_{i_1}, M_{i_2}, ..., M_{i_n}$ — соответственно множества значений переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}$, то эта форма задает предикат на множестве $M_{i_1}\times M_{i_2}\times ...\times M_{i_n}$.

Условимся, говоря «предикат, заданный высказывательной формой Ф» и не указывая при этом порядка переменных, полагать, что для переменных принят алфавитный порядок либо порядок возрастания их номеров. Иногда для краткости будем говорить просто «предикат Ф», например «предикат $x+2z=y$» (подразумевается алфавитный порядок переменных) или «предикат $x_2=x_1+x_3$» (считаем, что переменные упорядочены по возрастанию номеров).

Предикат, заданный на множестве упорядоченных n-ок, называют *n-местным*. При n, равном 1, 2, 3, имеем соответственно *одноместный, двуместный, трехместный* предикаты.

Остановимся на происхождении термина «предикат» и эволюции его значения. На латыни слово «предикат» (praedicatum) означает «сказуемое». Традиционная логика выделяет в элементарном высказывании (суждении) субъект и предикат. Субъект (логическое подлежащее) — то, о чем говорится в высказывании; предикат (логическое сказуемое) — то, что говорится (утверждается или отрицается) о субъекте. Например, в высказывании «Кошка имеет четыре ноги» «кошка» — субъект, «имеет четыре ноги» — предикат. Если на место слова «кошка» поставить слово «собака», то снова получится истинное высказывание «Собака имеет четыре ноги». Если же в качестве субъекта взять слово «курица», то получится ложное высказывание «Курица имеет четыре ноги». Заменив субъект переменной, получаем высказывательную форму «x имеет четыре ноги» и предикат как функцию, задаваемую этой формой. Естественным обобщением понятия «одноместный предикат» является понятие «n-местный предикат».

Одноместные предикаты иногда называют *предикатами-свойствами*, а n-местные при $n>1$ — *предикатами-отношениями*. Так, например, предикат $x<0$ выражает свойство чисел, а предикат $x<y$ — отношение между числами. Позже смысл слов «свойство» и «отношение» будет уточнен.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Предикат P задан таблицей

1	2	3	4	5	6	7	8	9
л	*и*	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*

Выпишите область определения и множество значений предиката P. Укажите, чему равны P (1), P (6). Подберите высказывательную форму, с помощью которой можно задать предикат P.

3. Предикат Q задан на множестве однозначных натуральных чисел высказывательной формой «x — простое число». Задайте предикат Q с помощью таблицы. Чему равны $Q(1)$, $Q(2)$, $Q(6)$?

4. Предикаты P_1, P_2 и P_3 заданы высказывательной формой «в слове x буква «а» встречается не более двух раз» на множествах M_1, M_2 и M_3 соответственно: $M_1 = \{$конь; стол; зал; чаша; барабан$\}$; $M_2 = \{$мир; чай; ваза$\}$; $M_3 = \{$карандаш; карнавал$\}$. Составьте таблицу для каждого из предикатов P_1, P_2 и P_3. Выпишите множества их значений.

5. Даны высказывательные формы $x^2 = 1$ и $|y| = 1$. Какое из следующих утверждений справедливо: а) «Данные формы задают на **R** один и тот же предикат»; б) «Данные формы задают на **R** два различных предиката»?

6. Различаются ли предикаты, заданные высказывательными формами $x^2 = 1$ и $(x-1)(x+2) = 0$ на множестве: а) целых чисел; б) натуральных чисел?

7. Верно ли, что: а) {а; п; е; л; ь; с; и; н;} = {с; п; а; н; и; е; л; ь;}; б) (а; п; е; л; ь; с; и; н;) = (с; п; а; н; и; е; л; ь;); в) {л; о; г; и; к; а} = {и; г; о; л; к; а}; г) (л; о; г; и; к; а) = (и; г; о; л; к; а)?

8. Пусть M_1 — множество букв в слове «осколок», M_2 — множество букв в слове «колос». Определите значения истинности следующих высказываний: а) $M_1 = M_2$; б) (о; с; к; о; л; о; к) = (к; о; л; о; с).

9. Из элементов множества $\{2; 3; 5\}$ составьте множество всевозможных: а) различных произведений двух однозначных сомножителей; б) двузначных чисел; в) упорядоченных пар; г) упорядоченных троек.

10. Найдите декартовы произведения $A \times B$ и $B \times A$ следующих множеств: а) $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{5; 6\}$; б) $A = \{a; b; c\}$; $B = \{b; c; d\}$.

11. Пусть $A = \{m; n; p\}$. Найдите A^2 и A^3.

12. Найдите M^3, если M — множество букв в слове «мама».

13. Каково число элементов декартова произведения n множеств, содержащих соответственно по $m_1, m_2, \ldots, m_n$ элементов?

14. Сколько различных декартовых произведений можно составить из n попарно несовпадающих множеств?

15. Изобразите на координатной плоскости множества точек, соответствующие декартовым произведениям $M_1 \times M_2$ и $M_2 \times M_1$, если: а) $M_1 = \mathbf{R}$; $M_2 = \mathbf{R}_+$ (множество положительных действительных чисел); б) $M_1 = \mathbf{R}_+$, $M_2 = \mathbf{R}_-$ (множество отрицательных действительных чисел); в) $M_1 =]1, +\infty[$, $M_2 = \mathbf{R}$; г) $M_1 =]-2, 3[$, $M_2 =]-1, 3]$. (Соответствующие области заштрихуйте; части границы области, ей не принадлежащие, изобразите пунктирной линией.)

16. Найдите области определения предикатов P_1 и P_2, заданных высказывательной формой $P(x, y)$, если $M_x = \{a; b; c\}$ и $M_y = \{a; d\}$ — множества значений переменных x и y.

17. Переменные высказывательной формы $x > y$ принимают значения из множества $\{1; 2; 3\}$; Q_1 и Q_2 — предикаты, задаваемые этой формой соответственно при алфавитном и обратном ему порядках переменных. Найдите: а) область определения предикатов Q_1 и Q_2; б) $Q_1((2, 3))$; $Q_2((2,3))$.

18. Сколько различных предикатов определяет высказывательная форма $x + y = z$, если M_x, M_y и M_z — множества значений переменных x, y и z: а) $M_x = \{1\}$, $M_y = \{1; 2\}$, $M_z = \{2; 3\}$; б) $M_x = M_y = M_z = \{1; 2\}$?

19. Сколько предикатов можно определить с помощью n-местной высказывательной формы, если никакие два множества значений входящих в нее переменных не совпадают?

3°. Множество истинности предиката. Каждому предикату P, заданному на множестве M, соответствует подмножество этого множества, состоящее из тех и только тех элементов M, которым соответствует значение *и* предиката P. Это подмножество M называется *множеством истинности* предиката P. Множество истинности предиката P будем обозначать через $\overline{P}$. Заметим, что $\overline{P} \subset M$.

Примеры. 1. Предикат P задан высказывательной формой «Река x впадает в Каспийское море» на множестве M названий всевозможных рек. Здесь $\overline{P}=\{$Волга; Урал; Эмба; Терек; Кума$\}$.

2. Предикат Q_1 задан высказывательной формой $x<y$, переменные которой принимают значения из множества $A=\{2; 4\}$. Областью определения предиката Q_1 является множество $A^2=\{(2; 2); (2; 4); (4; 2); (4; 4)\}$. Составим таблицу для предиката Q_1:

$(x;\ y)$	$x<y$	$Q_1(x, y)$
$(2;\ 2)$	$2<2$	*л*
$(2;\ 4)$	$2<4$	*и*
$(4;\ 2)$	$4<2$	*л*
$(4;\ 4)$	$4<4$	*л*

Из таблицы видно, что $\overline{Q}_1=\{(2; 4)\}$. Приняв для переменных обратный порядок, получим предикат Q_2, для которого $\overline{Q}_2=\{(4; 2)\}$.

3. Для предикатов P и Q, заданных на $\mathbf{R}$ высказывательными формами $x^2 \geqslant 0$ и $x<0$, соответственно имеем $\overline{P}=\mathbf{R}$, $\overline{Q}=\varnothing$.

Если множество истинности предиката совпадает с его областью определения, то такой предикат называется ***тождественно истинным.*** *Если множество истинности предиката пусто, то такой предикат называется* ***тождественно ложным.***

Два предиката с одной и той же областью определения различны тогда и только тогда, когда их множества истинности не совпадают (докажите это самостоятельно; напомним, что две функции считаются равными, если совпадают их области определения и каждому элементу области определения соответствуют равные значения этих функций).

УПРАЖНЕНИЯ

20. Найдите множества истинности следующих предикатов: а) x кратно 3; $M_x = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; б) x кратно 3; $M_x = \{3; 6; 9; 12\}$; в) x кратно 3; $M_x = \{2; 5; 7\}$; г) $y^2+3y+2=0$; $M_y=\mathbf{R}$; д) $y^2+1\geqslant 0$; $M_y=\mathbf{R}$; е) $\sin y>2$; $M_y=\mathbf{R}$; ж) $x^2+y^2=0$; $M_x=M_y=\mathbf{R}$; з) $x^2+y^2<0$; $M_x=M_y=\mathbf{R}$; и) $x<y$; $M_x=\{1; 2; 3; 4\}$; $M_y=\{3; 4; 5\}$; к) y_1 делит y_2; $M_1=M_2=\{2; 3; 4; 6\}$.

21. Изобразите на координатной прямой множества истинности предикатов, заданных на $\mathbf{R}$ следующими высказывательными формами: а) $x>2$; б) $|x|=1$; в) $|x|<1$; г) $|x|>1$; д) $|x-2|>1$; е) $|x+3|\leqslant 1$; ж) $x^2+2x+1=0$; з) $x^2+6x+9>0$; и) $x^2+6x-16\leqslant 0$; к) $x^2/x=x$.

22. Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих предикатов (переменные принимают значения из множества $\mathbf{R}$): а) $x=y$; б) $x=2y$; в) $x^2+y^2=1$; г) $y=|x|$; д) $y\geqslant x^2$; е) $y=1/x$; ж) $(x^2-y^2)/(x-y)=x+y$.

23. Среди предикатов из упр. 21 и 22 укажите: а) тождественно истинные; б) тождественно ложные.

24. Придумайте по два примера тождественно истинных и тождественно ложных предикатов.

25. Установите, равны ли предикаты, заданные высказывательными формами: а) $x^2=1$ и $x=1$; $M_x=\mathbf{N}$ (множество натуральных чисел); б) $x^2=x$ и $x=1$; $M_x=\mathbf{N}$; в) $x-1=y$ и $(x^2-1)/(x+1)=y$; $M_x=M_y=R_+$; 2) «x — число делителей простого числа» и «x — простое четное число»; $M_x=\mathbf{N}$.

26. Задайте множество значений переменных так, чтобы предикаты, заданные следующими высказывательными формами, имели одно и то же множество истинности: а) «x делится на 2»; «x делится на 3»; б) $x^2+5x+6=0$; $x=-2$; в) $y=x$; $\sqrt{y}=\sqrt{x}$; г) $y=x$; $|y|=|x|$; д) «x—ромб»; «диагонали в x взаимно перпендикулярны».

27. Сколько различных предикатов можно задать на: а) одноэлементном; б) двухэлементном; в) трехэлементном множестве?

4°. Равносильность высказывательных форм. Пусть в высказывательных формах Φ_1 и Φ_2 одинаковые переменные принимают значения из одного и того же множества. Такие *высказывательные формы называются* ***равносильными,*** *если при всяком наборе значений входящих в них переменных они принимают одинаковые значения истинности.*

Утверждение о равносильности высказывательных форм Φ_1 и Φ_2 коротко будем записывать так*: $\Phi_1\Leftrightarrow\Phi_2$.

Примеры (переменные принимают значения из $\mathbf{R}$).

1. $x+1=0\Leftrightarrow x=\cos\pi$; обе формы становятся истинными высказываниями при $x=-1$ и ложными — при всех других значениях x.

---

* Символ $\Leftrightarrow$ для обозначения равносильности уравнений, неравенств (вообще предложений с переменными) принят в школьных учебниках.

2. $|x|>3 \Leftrightarrow x^2-9>0$; обе формы становятся истинными высказываниями тогда и только тогда, когда x принимает значения из множества $]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

3. $|x|\geqslant 0 \Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=1$; обе формы истинны при любом значении x.

4. $|x|<0 \Leftrightarrow \sin x=2$; обе формы ложны при любом x.

5. $x=1 \Leftrightarrow x+y-y=1$; обе формы истинны при $x=1$ и любом значении y и ложны при $x\neq 1$.

6. Формы $x>0$ и $y>0$ не равносильны; форма $x>0$ истинна при положительных значениях x и любых значениях y; форма $y>0$ истинна только при положительных значениях y.

7. Формы $x=x$ и $x^2/x=x$ не равносильны; при $x=0$ форма $x=x$ истинна, а $x^2/x=x$ ложна (см. соглашение на с. 69).

Если в качестве множества значений переменной для форм $x=x$ и $x^2/x=x$ взять любое подмножество $\mathbf{R}$, не содержащее 0, то эти формы окажутся равносильными. Таким образом, истинность высказывания $\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2$ зависит, вообще говоря, от множеств значений переменных, входящих в эти формы.

Отношение равносильности высказывательных форм рефлексивно, симметрично и при условии, что одинаковые переменные во всех рассматриваемых формах принимают значения из одного и того же множества, транзитивно (докажите!).

Замену формы Φ_1 равносильной ей формой Φ_2 будем называть *равносильным преобразованием* формы Φ_1. В силу транзитивности отношения равносильности из равносильностей вида $\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2$, $\Phi_2 \Leftrightarrow \Phi_3$, ..., $\Phi_{n-1} \Leftrightarrow \Phi_n$ можно составить «цепочку» $\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2 \Leftrightarrow \Phi_3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \Phi_{n-1} \Leftrightarrow \Phi_n$, любые два «звена» которой — равносильные формы.

Если Φ_1 и Φ_2 — равносильные высказывательные формы с одними и теми же переменными, для которых установлен один и тот же порядок, то они определяют один и тот же предикат. В самом деле, предикаты P_1 и P_2, заданные высказывательными формами Φ_1 и Φ_2, имеют общую область определения и в силу равносильности Φ_1 и Φ_2 одинаковые множества истинности; следовательно, $P_1=P_2$.

Уравнения и неравенства — частные виды высказывательных форм. Решая уравнение или неравенство, мы ищем множество истинности определяемого им предиката.

Чаще всего бывает трудно найти это множество сразу, непосредственно; тогда данную форму подвергают упрощающим равносильным преобразованиям.

Пусть, например, требуется решить уравнение $3x+$ $+1=2x-5$. Имеем

$$3x+1=2x-5 \Leftrightarrow 3x-2x=-5-1 \Leftrightarrow x=-6.$$

Ответ: $\{-6\}$.

УПРАЖНЕНИЯ

28. Определите, равносильны ли следующие высказывательные формы, если переменные принимают значения из множества **R**; **Q**; **Z**; **N**: а) $x^2=1$; $(x-\sqrt{2})(x+0,5)(x-1)(x+1)=0$; б) $(x^2-2):$ $:(x+\sqrt{2})=x-\sqrt{2}$; $\sin x \leqslant 1$; в) $|x|\leqslant 0$; $x^2=0$; г) $\sqrt{xy}=6$; $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=6$; д) $x=y$; $|x|=|y|$; е) $x>1$; $y>1$; ж) $x=2$; $x+y/y=3$.

29. Верны ли следующие высказывания: а) «x — мать y»$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$«y — дочь x»; б) «x — мать y»$\Leftrightarrow$«y—дочь или сын x»; в) «x— брат y»$\Leftrightarrow$ «x и y—родственники»; г) «x — брат или сестра y»$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ «y — брат или сестра x»; д) «x — сын y и y — сын z» $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$«z — дед x»?

30. Приведите по два примера равносильных высказывательных форм: а) одноместных; б) двуместных; г) трехместных; г) одноместной и двуместной; д) одноместной и трехместной; е) двуместной и трехместной.

31. Приведите примеры одноместных высказывательных форм: а) равносильных на множестве натуральных чисел и неравносильных на множестве целых чисел; б) равносильных на множестве рациональных чисел и неравносильных на множестве действительных чисел.

32. Задайте множество значений переменной так, чтобы на этом множестве данные высказывательные формы были равносильны: а) «x кратно 3»; «x кратно 5»; б) «y — четное число»; «y — простое число»; в) $x^3-1=0$; $x^2+2x-3=0$; г) «z — ромб»; «диагонали в z взаимно перпендикулярны».

33. Найдите множество значений p, при которых данные формы равносильны на M: а) $x^2+px+1=0$; $x=1$; $M=Q$; б) $|x|<p$; $x^2-9<0$; $M=Q$; в) $x>1$; $\lg x>p$; $M=]0, +\infty[$; г) $x^2+2x+1=$ $=(x+1)^2$; $|x|>p$; $M=\mathbf{R}$; д) $|x|<0$; $x^2+px+4=0$; $M=\mathbf{R}$.

34. Найдите множества истинности предикатов, заданных на **R** следующими высказывательными формами:

$$\text{а) } \frac{x-2}{3}-\frac{x+5}{4}=1; \quad \text{б) } \frac{2x+3}{5}+\frac{x-7}{2}=7;$$

$$\text{в) } 5(4-x)<3(x+12); \quad \text{г) } \frac{2x-1}{4}+\frac{x+3}{2}>1.$$

5⁰. Логические операции и операции над множествами. В этом пункте будет выяснена связь между логическими операциями над высказывательными формами и операциями над множествами истинности предикатов, определяемых этими формами.

Отрицанием высказывательной формы Φ называется высказывательная форма, ложная при тех наборах значений переменных, которые обращают Φ в истинное высказывание, и истинная при тех наборах значений переменных, которые обращают Φ в ложное высказывание. Отрицание высказывательной формы Φ обозначается $\overline{\Phi}$.

Примеры (переменная принимает значения из $\mathbf{R}$).

1. $\overline{x \geqslant 2} \Leftrightarrow x < 2$.

2. Высказывательные формы $\overline{\sqrt{x} \geqslant 2}$ и $\sqrt{x} < 2$ не равносильны, так как при $x < 0$ форма $\overline{\sqrt{x} \geqslant 2}$ истинна, а форма $\sqrt{x} < 2$ ложна (см. соглашение на с. 69).

Теорема 1. *Если предикаты P и Q заданы на M соответственно высказывательными формами* $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $\overline{\Phi}(x_1, x_2, \ldots, x^n)$, *то* $\overline{Q} = M \setminus \overline{P}$ (рис. 11).

Конъюнкцией высказывательных форм Φ_1 и Φ_2 называется высказывательная форма, истинная при тех и только тех значениях входящих в нее переменных, которые обращают обе формы Φ_1 и Φ_2 в истинные высказывания. Конъюнкция высказывательных форм Φ_1 и Φ_2 обозначается $\Phi_1 \wedge \Phi_2$.

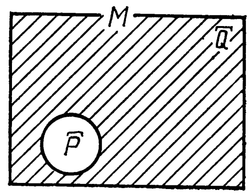

Рис. 11

Примеры (переменные принимают значения из $\mathbf{R}$).

1. $x > -3 \wedge x < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \Leftrightarrow |x| < 3$.
2. $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 3 \wedge x - y = 1$.
3. $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$.

Теорема 2. *Если предикаты P_1, P_2 и P заданы на M соответственно высказывательными формами* $\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *то* $\overline{P} = \overline{P}_1 \cap \overline{P}_2$.

Из школьного курса алгебры известно, что множество решений системы (т. е. конъюнкции) уравнений или неравенств есть пересечение множеств решений входящих в нее уравнений или неравенств. При этом: 1) во всех высказывательных формах, составляющих систему, подразумевается один и тот же (как правило, алфавитный) порядок переменных; 2) если высказывательные формы, образующие систему, содержат не одни и те же переменные, то (явно или неявно) вводятся так называемые «фиктивные» переменные с нулевыми коэффициентами так, чтобы множества переменных во всех предложениях совпали. Например, система уравнений $\begin{cases}x=1,\\ x+2y=3\end{cases}$ рассматривается как система $\begin{cases}x+0\cdot y=1\\ x+2y=3\end{cases}$; иначе множество ее решений нельзя было бы рассматривать как пересечение множеств решений составляющих уравнений. В самом деле, множество M_1 решений первого уравнения есть $\{1\}$, а каждый элемент множества M_2 решений второго уравнения — это пара чисел, т. е. $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, тогда как множество решений данной системы имеет вид $\{(1;\ 1)\}$.

Дизъюнкцией высказывательных форм Φ_1 и Φ_2 называется высказывательная форма, ложная при тех и только тех наборах значений входящих в нее переменных, которые обращают обе формы Φ_1 и Φ_2 в ложные высказывания. Дизъюнкция высказывательных форм Φ_1 и Φ_2 обозначается $\Phi_1 \vee \Phi_2$.

Примеры (переменная принимает значения из $\mathbf{R}$).

1. $x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x-1=0$.

2. $x \lg x=0 \not\Leftrightarrow x=0 \vee \lg x=0$, так как при $x=0$ форма $x \lg x=0$ обращается в ложное высказывание (см. соглашение на с. 69), а форма $x=0 \vee \lg x=0$ — в истинное высказывание.

Теорема 3. *Если предикаты P_1, P_2 и P заданы на M соответственно высказывательными формами $\Phi_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\Phi_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\Phi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \vee \vee \Phi_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, то $\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{P}}_1 \cup \overline{\overline{P}}_2$.*

Все сказанное выше о системах уравнений (неравенств) относится и к совокупностям (дизъюнкциям) уравнений (неравенств) с той разницей, что множество решений совокупности уравнений (неравенств) есть объединение множеств решений входящих в нее уравнений (неравенств).

Импликацией высказывательных форм Φ_1 и Φ_2 называется высказывательная форма, ложная при тех и только тех наборах значений входящих в нее переменных, которые обращают Φ_1 в истинное высказывание, а Φ_2 — в ложное высказывание. Импликация высказывательных форм Φ_1 и Φ_2 обозначается $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$.

Примеры. 1. Импликация «x — простое число $\to x$ — нечетное число» ложна только при $x=2$.

2. Импликация $x<0\to y\geqslant 0$ ложна только при отрицательных значениях x и y.

3. Импликация $\lg x>0\to x>1$ истинна при всех действительных значениях x. (При $x\leqslant 0$ действует соглашение, принятое на с. 69.)

4. Импликация $\sin^2 x+\cos^2 x=1\to |y|<0$ ложна при любых значениях переменных.

Эквиваленцией высказывательных форм Φ_1 и Φ_2 называется высказывательная форма, которая становится истинным высказыванием, если формы Φ_1 и Φ_2 обе становятся истинными либо ложными высказываниями; если же одна из форм Φ_1 и Φ_2 становится истинным высказыванием, а другая — ложным, то их эквиваленция становится ложным высказыванием. Эквиваленция высказывательных форм Φ_1 и Φ_2 обозначается $\Phi_1\leftrightarrow\Phi_2$.

Примеры. 1. Эквиваленция $x<y\leftrightarrow y>x$ истинна при любых значениях переменных.

2. Эквиваленция $x=y\leftrightarrow \lg x=\lg y$ ложна, когда переменные x и y принимают равные неположительные значения; при всех остальных значениях переменных эта эквиваленция истинна. Например, при $x=1$, $y=-2$ формы $x=y$ и $\lg x=\lg y$ обращаются в ложные высказывания (см. соглашение на с. 69); следовательно, форма $x=y\leftrightarrow \lg x=\lg y$ становится истинным высказыванием.

3. Эквиваленция $\sin^2 x+\cos^2 x=1\leftrightarrow |x|<0$ ложна при всех значениях переменной.

УПРАЖНЕНИЯ

35. Определите, равносильны ли на множестве M следующие высказывательные формы: а) $x=2$, $x\neq 2$; $M=\mathbf{R}$; б) $x\geqslant 2$, $x\leqslant 2$; $M=\mathbf{R}$; в) $x>2$, $x<2$; $M=\mathbf{R}$; г) $x>2$, $x\leqslant 2$; $M=\mathbf{R}$; д) «y — простое число», «y — составное число»; $M=\mathbf{N}$; е) «y — четное число», «y — нечетное число»; $M=\mathbf{N}$; ж) «f — четная функция», «f — нечетная функция»; M — множество всевозможных числовых функций числового аргумента; з) $|x|<1$; $x^2-1\geqslant 0$; $M=\mathbf{R}$; и) $|x|<0$; $\sin 2x=2\sin x\cos x$; $M=\mathbf{R}$; к) $x^2+y^2\geqslant 0$, $\sin x=2$; $M=\mathbf{R}$; л) $x\in\{2;3;4;5\}$, $x\in\{1;6;7\}$; $M=\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

36. Подберите множество M так, чтобы на нем выполнялись равносильности: а) $x \vdots 2 \Leftrightarrow x \vdots 3$; б) «$x$ — простое число» $\Leftrightarrow$ «x — составное число»; в) «различные прямые x и y пересекаются» $\Leftrightarrow$ «различные прямые x и y параллельны»; г) $x\parallel y \Leftrightarrow x\perp y$.

37. Предикат P задан высказывательной формой «x — простое число» на множестве $M=\{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$; предикат Q задан отрицанием этой формы. Найдите множества истинности предикатов P и Q; выразите $\overline{Q}$ через $\overline{P}$ и M.

38. Докажите теорему 1.

39. Найдите множества истинности предикатов, заданных на M следующими высказывательными формами: а) $x>2$; $M=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$; б) x — простое число, $M=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$; в) x — делитель 12, $M=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$; г) $1/x>1$, $M=\mathbf{R}_+$; д) $x^2\geqslant 0$; $M=\mathbf{R}$; е) $|x|<0$, $M=\mathbf{R}$; ж) $\lg x>1$, $M=\mathbf{R}$; з) $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $M=\mathbf{R}$; и) $\operatorname{tg} x=\sin x/\cos x$; $M=\mathbf{R}$.

40. а) Изобразите на координатной прямой множества истинности предикатов, заданных на $\mathbf{R}$ следующими высказывательными формами: $|x|\neq 2$; $|x|>1$; $|x|\leqslant 3$; $x^2/x=x$; $x^2/x\neq x$.

б) Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих предикатов ($M_x=M_y=\mathbf{R}$): $x-y=0$; $x-y>0$; $x-y\geqslant 0$; $x-y<0$; $(x^2-y^2)/(x-y)=x+y$.

41. Установите, равносильны ли следующие высказывательные формы ($M_x=M_y=\mathbf{R}$): а) $|x|<2$, $(x>-2)\wedge(x<2)$; б) $x^2+5x+4<0$, $(x<-1)\wedge(x>-4)$; в) $|x|<0$, $(x>3)\wedge(x=2)$; г) $\lg x<0$, $(x>0)\wedge(x<1)$; д) $xy\neq 0$, $(x\neq 0)\wedge(y\neq 0)$; е) $x/y\neq 0$, $(x\neq 0)\wedge\wedge(y\neq 0)$.

42. Сформулируйте определение конъюнкции n высказывательных форм.

43. Предикаты P_1 и P_2 заданы на $\mathbf{N}$ высказывательными формами «x — простое число» и «x — четное число». Найдите множество истинности предиката P, заданного конъюнкцией этих высказывательных форм; выразите $\overline{P}$ через $\overline{P_1}$ и $\overline{P_2}$.

44. Докажите теорему 2.

45. Сформулируйте теорему, аналогичную теореме 2, для конъюнкции n высказывательных форм.

46. Изобразите на координатной прямой множества истинности предикатов, заданных на $\mathbf{R}$ следующими высказывательными формами: а) $x>2)\wedge(x\wedge 3)$; б) $(x>2)\wedge(x<5)$; в) $(|x|<3\wedge x\geqslant 2)$; г) $(\sin x>0)\wedge(|x-2|<5)\wedge(\lg x>1)$.

47. Изобразите на координатной плоскости множества истинности предикатов, заданных следующими высказывательными формами ($M_x=M_y=\mathbf{R}$):

а) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y<-(1/2)x+2, \\ y<-(1/2)x+1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y\geqslant (1/3)x+1, \\ y\leqslant 2x-2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4; \\ x^2+y^2>1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y>2x-4, \\ y<(1/3)x+2, \\ y>-(1/2)x+3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x>0, \\ x+y>0; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x>0, \\ y<0. \end{cases}$

48. Сформулируйте определение дизъюнкции n высказывательных форм.

49. Докажите теорему 3.

50. Сформулируйте теорему, аналогичную теореме 3, для дизъюнкции n высказывательных форм.

51. Следующие высказывательные формы замените равносильными им дизъюнкциями:

а) $|x+3|>3$; б) $(x-5)/(x-1)>0$; в) $x^2-5x+6=0$;

г) $x^2+y^2\neq 0$.

52. Определите, являются ли равносильными на $\mathbf{R}$ следующие высказывательные формы: а) $x(x-2)=0$, $x=0\vee(x-2=0)$; б) $\overline{x<0}$, $(x>0)\vee(x=0)$; в) $\sqrt{x-2}>2$, $(\sqrt{x-2}<2)\vee(\sqrt{x-2}=2)$; г) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $x>0\vee x\leqslant 0$; д) $x^2+1=0$, $\sin x=2\vee(|x|<0)$.

53. Предикаты P_1, P_2 и P заданы высказывательными формами «x — простое число», «x — четное число» и их дизъюнкцией на множестве $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Найдите множества истинности предикатов P_1, P_2 и P; выразите $\overline{P}$ через $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$.

54. Следующие высказывательные формы замените равносильными им дизъюнкциями: а) $x^2-5x+6>0$; б) $x^3-x\geqslant 0$; в) $x\cdot\sin x<0$. Изобразите на координатной прямой множества истинности предикатов, заданных этими формами на $\mathbf{R}$.

55. Изобразите на координатной плоскости множества истинности предикатов, заданных следующими высказывательными формами: а) $(x>0)\vee(y\leqslant 0)$; б) $(x^2+y^2=1)\vee(x<0)$; в) $(x^2+y^2=1)\vee(xy=0)$; г) $(x^2+y^2\geqslant 0)\vee(|x|+|y|>|x+y|)$; д) $(x^2+y^2<0)\vee(xy=0)$; е) $(x>0)\vee(x+y=3)$.

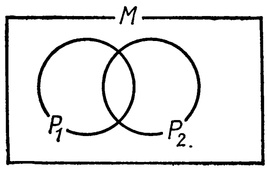

Рис. 12

56. Предикаты P_1 и P_2 заданы на M (рис. 12) высказывательными формами $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$; укажите на рисунке множество истинности предиката P, заданного на M высказывательной формой $\Phi_1(x)\to\Phi_2(x)$, и выразите $\overline{P}$ через $\overline{M}$, $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$.

57. Предикаты P_1, P_2 и P заданы на $\mathbf{N}$ соответственно высказывательными формами «x — простое число», «x — нечетное число» и их импликацией. Найдите $\overline{P}$ и выразите его через $\mathbf{N}$, $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$.

58. Найдите множества истинности следующих предикатов ($M_x=\{1; 2; ...; 30\}$): а) («x — четное число»)$\to$(«x — квадрат натурального числа»); б) («x — квадрат натурального числа»)$\to$(«x — четное число»).

59. Изобразите на координатной прямой множества истинности предикатов, заданных на $\mathbf{R}$ следующими высказывательными формами: а) $(x<5)\to(x>1)$; б) $(x>5)\to(x>1)$; в) $(x>1)\to(x<5)$, г) $(x^2>0)\to(x^2+2x-3>0)$; д) $(|x|<2)\to(|x|<3)$; е) $(|x|>2\to(|x|>3)$; ж) $(|x|>2)\to(|x|<3)$; з) $(|x|<2)\to(|x|>3)$;

60. Изобразите на координатной плоскости множества истинно-

сти следующих предикатов ($M_x=M_y=\mathbf{R}$): а) $(x^2+y^2<1)\to(xy>0)$; б) $(x^2+y^2\geqslant 0)\to(xy>0)$; в) $(x^2+y^2<0)\to(x=y)$; г) $(x^2+y^2>1)\leftrightarrow(xy<0)$.

61. Предикаты P_1, P_2 и P заданы на M (см. рис. 12) соответственно высказывательными формами $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ и $\Phi_1(x)\leftrightarrow\Phi_2(x)$. Укажите на рисунке $\overline{P}$ и выразите его через M, $\overline{P_1}$ и $\overline{P_2}$.

62. Предикаты P_1 и P_2 заданы на $\mathbf{N}$ высказывательными формами «x — простое число» и «x — нечетное число»; предикат P задан эквиваленцией этих высказывательных форм. Выразите $\overline{P}$ через $\mathbf{N}$, $\overline{P_1}$ и $\overline{P_2}$.

63. Высказывательным формам $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ соответствуют таблицы:

$x \backslash y$	a	b	c	d
c	и	л	л	и
d	л	и	и	л
e	и	л	л	л

$x \backslash y$	a	b	c	d
c	и	л	и	л
d	и	и	л	л
e	л	л	и	и

а) Выпишите область определения M предикатов P_1 и P_2, заданных этими формами. Найдите $\overline{P_1}$ и $\overline{P_2}$.

б) Найдите множества истинности предикатов Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, заданных соответственно следующими высказывательными формами: $\overline{\Phi_1}(x, y)$; $\overline{\Phi_2}(x, y)$; $\Phi_1(x, y)\wedge\Phi_2(x, y)$; $\Phi_1(x, y)\vee\Phi_2(x, y)$; $\Phi_1(x, y)\to\Phi_2(x, y)$; $\Phi_1(x, y)\leftrightarrow\Phi_2(x, y)$.

64. Докажите, что $\Phi_1\Longleftrightarrow\Phi_2$ тогда и только тогда, когда эквиваленция $\Phi_1\leftrightarrow\Phi_2$ истинна при любых значениях переменных, входящих в $\Phi_1\leftrightarrow\Phi_2$.

6⁰. Следование и включение. Говорят, что *высказывательная форма Φ_2 следует из высказывательной формы Φ_1, если $\Phi_1\to\Phi_2$ обращается в истинное высказывание при любых наборах значений входящих в нее переменных.*

Утверждение «из Φ_1 следует Φ_2» кратко будем записывать так*: $\Phi_1\Rightarrow\Phi_2$.

Поскольку импликация $\Phi_1\to\Phi_2$ обращается в ложное высказывание только в тех случаях, когда Φ_1 обращается в истинное высказывание, а Φ_2 — в ложное высказывание, данное определение можно переформулировать так: из Φ_1 следует Φ_2, если всякий раз, когда Φ_1

* Такое обозначение принято в школьных учебниках.

становится истинным высказыванием, Φ_2 также становится истинным высказыванием.

Примеры (в примерах 1—5 $M_x=\mathbf{R}$).

1. Из равенства $x=0$ следует равенство $x(x-1)=0$.

2. Из равенства $(x-1)x=0$ **не следует** равенство $x=0$, так как при $x=1$ первое равенство верно, а второе — неверно.

3. Из равенства $x(x-1)=0$ следует неравенство $x>-1$, так как корни 0 и 1 уравнения являются решениями неравенства.

4. Из неравенства $|x|<0$ следует любая высказывательная форма Φ, так как это неравенство не выполняется ни при каком значении переменной, и поэтому форма $|x|<0\to\Phi$ истинна при любых значениях входящих в нее переменных.

5. Форма $|x|\geqslant 0$ следует из любой формы Φ, так как неравенство $|x|\geqslant 0$ верно при любых значениях x, и поэтому форма $\Phi\to|x|\geqslant 0$ истинна при любых значениях входящих в нее переменных.

6. Из формы «x — сын y и z» следует форма «y и z — родители x», но из формы «y и z — родители x» не следует форма «x — сын y и z», так как существует набор значений переменных (дочь, отец, мать), при которых форма «y и z — родители x» становится истинным высказыванием, а форма «x — сын y и z» — ложным высказыванием.

7. Из формы «x четно» не следует форма «x кратно 3», если $M_x=\mathbf{N}$, и следует, если $M_x=\{1;\ 3;\ 5;\ 6;\ 7;\ 9;\ 11;\ 12\}$. В самом деле, на этом множестве всякий раз, когда истинна первая форма, истинна и вторая.

Из последнего примера видно, что наличие отношения следования (так же как и отношения равносильности) между высказывательными формами зависит, вообще говоря, от множества, на котором они рассматриваются. В отличие от следования и равносильности в логике высказываний, где переменные обозначают произвольные элементарные высказывания, здесь идет речь о предложениях с переменными, заменяющими какой-либо член предложения (чаще всего подлежащее или дополнение). С каждой переменной связывается множество ее значений — чисел или каких-либо других объектов (предметов). Переменные такого рода называются *предметными* (напомним, что переменные для высказываний мы называли высказывательными или истинностными).

Отношение следования между высказывательными формами с предметными переменными связано с отношением включения между множествами истинности предикатов, определяемых этими формами.

Теорема 4. *Если высказывательные формы* $\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $\Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *определяют предикаты* P_1 *и* P_2, *то* $\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{P_1} \subset \overline{P_2}$.

Доказательство. 1. Если $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$, то всякий раз, когда истинна Φ_1, истинна и Φ_2; следовательно, если какому-либо набору $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствует значение *и* предиката P_1, то значение предиката P_2, соответствующее этому набору, также *и*, т. е. $\overline{P_1} \subset \overline{P_2}$.

2. Если $P_1 \subset P_2$, то всякий набор значений переменных, обращающий Φ_1 в истинное высказывание, обращает и Φ_2 в истинное высказывание, т. е. $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$.

УПРАЖНЕНИЯ

65. Определите, следует ли одна высказывательная форма из другой, если $M_x = \mathbf{R}$: а) $|x| < 3$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^4 = 16$; $x^2 = -2$; в) $x^2 + x - 6 = 0$; $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$; г) $x - 1 > 0$; $(x-2)(x-5) = 0$; д) $\sin x = 2$; $x^2 + 5 = 0$; е) $x^2 + 5x - 6 > 0$; $x + 1 = 1 + x$; ж) $x = \sin \pi$; $x^2 \leqslant 0$.

66. Задайте множество M значений переменной так, чтобы на этом множестве вторая форма следовала из первой: а) «x кратно 3», «x четно»; б) $x^2 = 1$, $x - 1 = 0$; в) «x нечетно», «x — квадрат натурального числа»; г) «x — трехсложное слово»; «в слове x буква «а» встречается не более двух раз»; д) «x — русский ученый», «x — математик».

67. Докажите, что на множестве $\mathbf{R}$ из неравенства $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 11x + 30} < 0$ следует, что $\sin x$ и $\cos x$ имеют разные знаки.

68. Найдите множество значений p, при которых из первой формы следует вторая ($M_x = \mathbf{R}$): а) $x > p$, $x > 1$; б) $x^2 + x - 6 = 0$, $|x| < p$; в) $|x| < p$, $x^2 < 9$; г) $|x| < p$, $x^2 - 5x + 7 = 0$; д) $|x| > p$, $|x| > 3$; е) $x < p$, $x^2 > 0$; ж) $x^2 + 5x + 6 = 0$; $x - p > 1$; з) $x^2 - p(1 + p^2)x + p^4 < 0$, $x^2 + 4x + 3 > 0$.

69. Найдите множество положительных значений δ, при которых из неравенства $|x - 2| < \delta$ следует неравенство $|x^2 - 4| < 5$.

§ 9. СВОЙСТВА И ОТНОШЕНИЯ

1⁰. Свойства как одноместные предикаты. Пусть дано непустое множество U. Всякая одноместная высказывательная форма Φ с переменной, принимающей значения из U, выражает свойство, присущее некоторым элементам множества U. Множество M таких элементов есть подмножество U; в частности, оно может совпадать с U либо быть пустым. Например, высказывательная форма «x — простое число» выделяет из множества $U_1=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$ его подмножество $M_1=\{2;\ 3;\ 5;\ 7\}$, из множества $U_2=\{2;\ 3;\ 5;\ 7\}$ — подмножество M_2, равное U_2, из множества $U_3=\{1;\ 6;\ 8;\ 9\}$ — подмножество $M_3=\varnothing$. Заменив переменную x любой другой переменной, мы, очевидно, выразим то же самое свойство; все эти формы определяют на множестве U один и тот же предикат, поэтому свойство элементов множества можно рассматривать как одноместный предикат, заданный на этом множестве*. Так как предикат полностью определен, если задано его множество истинности, то понятие «свойство элементов данного множества» можно свести к понятию «подмножество элементов данного множества». Множество элементов, обладающих свойством P, называют *объемом* данного свойства. Приняв такую точку зрения, мы должны будем считать одинаковыми любые два «равнообъемных» свойства, например такие два свойства элементов множества параллелограммов, как свойства быть ромбом с прямым углом или прямоугольником с конгруэнтными смежными сторонами.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определите, какие из данных высказывательных форм выражают одинаковые по объему свойства элементов множества $\mathbf{R}$ действительных чисел: а) $x\geqslant 0$; б) «y — наибольшее однозначное число»; в) «x — число шипящих в слове «мама»; г) «y — число тупых углов в прямоугольном треугольнике»; д) $|y| = 1$; е) «x — число букв в слове «уравнение»; ж) «100 — запись числа y в троичной системе счисления»; з) $y^2-1 = 0$; и) $(x-1)\ (x+1) = 0$; к) «y — неотрицательное число».

---

* Двуместные предикаты можно рассматривать как свойства элементов множества пар, трехместные — как свойства элементов множества троек и т. д. Однако чаще с n-местными предикатами при $n>1$ связывается понятие отношения, которое мы рассмотрим позже.

2. Задайте высказывательной формой свойство элементов множества U параллелограммов, объем которого: а) не совпадает с U и не является пустым множеством; б) совпадает с U; в) является пустым множеством.

2⁰. Классификация. Пусть на множестве U задано свойство P, т. е. так или иначе выделено подмножество $\overset{\frown}{P}$ множества U; тогда имеем разбиение U на два подмножества: $\overset{\frown}{P}$ и $U \setminus \overset{\frown}{P}$. Такое разбиение называется *классификацией* множества U по основанию P. На рис. 13 иллюстрируется классификация множества U однозначных натуральных чисел по основанию «быть простым числом». Если предикат P задать высказывательной формой $P\ (x)$ «x — простое число», то эта классификация описывается формой $P\ (x) \vee \overline{P}(x)$.

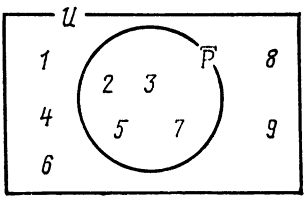

Рис. 13

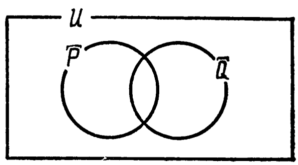

Рис. 14

Зададим на множестве U еще одно свойство Q. Тогда получим разбиение множества U на четыре подмножества (рис. 14), причем некоторые из них могут быть пустыми. Такое разбиение есть классификация элементов множества U по основаниям P и Q. Эту классификацию можно описать следующим образом:

$$(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge \overline{Q}(x)) \vee$$
$$\vee\ (\overline{P}(x) \wedge Q(x)) \vee (\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x)).$$

Если Q означает свойство «быть четным числом», то элементы множества U однозначных натуральных чисел расклассифицируются так, как показано на рис. 15, т. е. однозначные натуральные числа окажутся расклассифицированными на: а) простые четные; б) простые нечетные; в) четные и непростые; г) нечетные и непростые.

Если на множестве U заданы три свойства P, Q и R, то имеем разбиение множества U на восемь подмножеств (рис. 16). Это разбиение есть классификация множества U по трем основаниям P, Q и R, которая описывается высказывательной формой

$$(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)) \vee (\overline{P}(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)) \vee$$

$$\vee (P(x) \wedge \overline{Q}(x) \wedge R(x)) \vee (P(x) \wedge Q(x) \wedge \overline{R}(x)) \vee$$

$$\vee (\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x) \wedge R(x)) \vee (\overline{P}(x) \wedge Q(x) \wedge \overline{R}(x)) \vee$$

$$\vee (P(x) \wedge \overline{Q}(x) \wedge \overline{R}(x)) \vee (\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x) \wedge \overline{R}(x)).$$

Аналогично производится классификация по любому числу оснований. Классификация элементов множества U по n основаниям есть разбиение этого множества на 2^n подмножеств (некоторые из них могут оказаться пустыми).

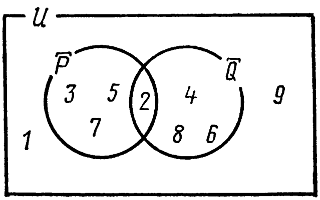

Рис. 15

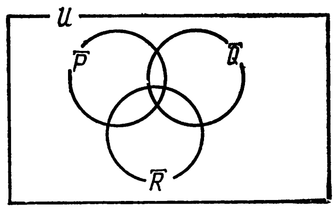

Рис. 16

Очевидно, что при правильной классификации: 1) *пересечение любых двух классов пусто;* 2) *объединение всех классов равно множеству, элементы которого классифицируются.*

Эти два условия называют п р а в и л а м и к л а с с и ф и к а ц и и; невыполнение хотя бы одного из них свидетельствует о том, что классификация произведена неправильно.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Пусть U — множество натуральных чисел, не превосходящих 40; P_1 — свойство быть квадратом натурального числа; P_2 — свойство быть нечетным числом; P_3 — свойство быть числом, кратным 3. Расклассифицируйте элементы множества U по основаниям: а) P_1; б) P_1 и P_2; в) P_1, P_2 и P_3. Опишите каждую из классификаций вы-

сказывательной формой. Охарактеризуйте словами каждое из подмножеств множества U, образовавшихся при классификациях а), б) и в).

4. Расклассифицируйте элементы множества треугольников по основаниям «быть прямоугольным треугольником» и «быть равнобедренным треугольником».

5. Расклассифицируйте элементы множества параллелограммов по основаниям «быть ромбом», «быть прямоугольником» и «быть квадратом». Какие классы при этом окажутся пустыми?

6. Сколько пустых классов получится при классификации множества треугольников по основаниям «прямоугольный треугольник», «тупоугольный треугольник», «остроугольный треугольник»?

7. Можно ли расклассифицировать: а) натуральные числа — на четные и нечетные; б) числовые функции числового аргумента — на четные и нечетные; в) натуральные числа — на простые и составные; г) действительные числа — на положительные и отрицательные; д) треугольники — на прямоугольные, косоугольные и равнобедренные; е) четырехугольники — на трапеции, параллелограммы, прямоугольники, ромбы и квадраты? Почему?

8. В олимпиаде участвовали 50 человек; 30 человек решили арифметическую задачу, 10 человек — геометрическую задачу, 9 человек — логическую задачу; 2 человека решили все три задачи, 7 человек решили арифметическую и логическую задачи, 3 человека решили арифметическую и геометрическую задачи, 4 человека решили логическую и геометрическую задачи. Сколько человек: а) решили арифметическую или геометрическую задачу; б) решили только арифметическую задачу; в) решили арифметическую и логическую задачи, но не решили геометрическую задачу; г) решили арифметическую задачу, если решили логическую задачу; д) решили логическую задачу тогда и только тогда, когда решили геометрическую задачу; е) не решили ни одной задачи?

9. Среди 150 школьников марки собирают только мальчики; 67 человек собирают марки СССР, 48 — марки Африки, 34 — марки Америки, 11 — только марки СССР, 7 — только Африки и 2 — только Америки. Один только Петя Галкин собирает марки СССР, Америки и Африки. Какое максимальное число девочек может быть среди 150 школьников?

3^0. Отношения как многоместные предикаты. Равенство, неравенство, параллельность, перпендикулярность, конгруэнтность, подобие, следование, равносильность, а также дружба, родство, соседство — все это примеры отношений. Понятие «отношение» можно уточнить с помощью понятия «предикат».

Примеры. 1. Высказывательная форма $x \| y$ выделяет из множества пар прямых на плоскости такие пары, компоненты которых находятся в отношении параллельности.

2. Высказывательная форма «x — отец y» выделяет из множества пар жителей Москвы пары людей, один из которых состоит в отношении отцовства ко второму.

3. Высказывательная форма «Точки x, y, z лежат на одной прямой» выделяет из множества всевозможных троек точек плоскости тройки точек, состоящих в отношении коллинеарности.

Вообще, если даны непустое множество M и n-местная высказывательная форма $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n>1)$, задающая на множестве M^n предикат R, то говорят, что *на множестве M задано отношение R*. Про элементы $\overline{R}$ говорят, что их компоненты находятся в отношении R. Отношения, порожденные двуместными предикатами, называются *бинарными*.

Утверждение «a находится в отношении R с b» будем кратко записывать так: aRb. Эта форма записи согласуется с привычной записью конкретных бинарных отношений: $x=y$, $x>y$, $x\perp y$, $x\|y$ и т. п. Для любого заданного бинарного отношения $xRy \Leftrightarrow (x, y)\subset\overline{R}$.

УПРАЖНЕНИЯ

10. На множестве $\{1; 2; 3; 4\}$ высказывательной формой $x\geqslant y$ с алфавитным порядком переменных задано отношение R. Выпишите пары, компоненты которых находятся в отношении R.

11. Высказывательная форма $x+y=z$ с переменными, упорядоченными по алфавиту и принимающими значениями из множества однозначных натуральных чисел, задает предикат R. Выпишите тройки чисел, компоненты которых находятся в отношении R.

12. На множестве $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ задано отношение R такое, что высказывательную форму xRy при алфавитном порядке переменных обращают в истинное высказывание пары (2; 4), (2; 6), (2; 8), (3; 9), (4; 8) и только эти пары. Каким словом может быть названо отношение R?

4°. Свойства бинарных отношений. Рассмотрим некоторые свойства бинарных отношений.

Рефлексивность. Отношение R, заданное на множестве M, называется *рефлексивным,* если для всякого x из этого множества xRx (высказывательная форма xRx истинна при любом значении x из M).

Примеры. 1. Отношение равенства рефлексивно на любом множестве: каждый предмет равен самому себе.

2. Отношение конгруэнтности рефлексивно на любом множестве геометрических фигур.

Симметричность. Отношение R, заданное на множестве M, называется *симметричным,* если на этом множестве из xRy следует yRx.

Примеры. 1. Отношение равенства симметрично на любом множестве.

2. Отношение конгруэнтности симметрично на любом множестве геометрических фигур.

3. Отношение родства симметрично на любом множестве людей.

4. Отношение «быть сестрой» симметрично на любом множестве женщин и может не быть симметричным на множестве, включающем и мужчин.

5. Отношение дружбы, как правило, симметрично, а отношение любви, к сожалению, часто бывает несимметричным.

Транзитивность. Отношение R, заданное на множестве M, называется *транзитивным,* если на этом множестве из $xRy \wedge yRz$ следует xRz.

Примеры. 1. На множестве прямых плоскости (пространства) отношение параллельности транзитивно, а отношение перпендикулярности не транзитивно.

2. Отношение родства, вообще говоря, не транзитивно, хотя легко можно представить себе множество, на котором это отношение транзитивно.

Антирефлексивность. Отношение R, заданное на множестве M, называется *антирефлексивным,* если для всякого x из этого множества $\overline{xRx}$.

Примеры. 1. Отношение неравенства ($\neq$) антирефлексивно на любом множестве.

2. Отношение «быть элементом множества» на каком-нибудь множестве множеств, как правило, антирефлексивно: почти все мыслимые множества не содержат себя в качестве элемента.

Антисимметричность. Отношение R, заданное на множестве M, называется *антисимметричным,* если на этом множестве из $xRy \wedge x \neq y$ следует $\overline{yRx}$.

Примеры. 1. Отношение «быть больше», «быть не меньше» антисимметричны на любом числовом множестве.

2. Отношение включения антисимметрично на любом множестве множеств.

3. Отношение равенства антисимметрично на любом множестве.

Связанность. Отношение R, заданное на множестве M, называется *связанным,* если на этом множестве из $x \neq y$ следует $xRy \vee yRx$.

Примеры. 1. Отношение «больше» является связанным на множестве действительных чисел и не является связанным на множестве комплексных чисел.

2. Отношение «старше» является связанным на любом множестве людей, среди которых нет ровесников.

3. Отношение равенства является связанным только на одноэлементном множестве.

УПРАЖНЕНИЯ

13. Установите, какими свойствами обладает каждое из отношений, заданных в таблице:

	Название отношения	Множество M		Название отношения	Множество M
а)	Делится на	Натуральных чисел	л)	Иметь общую точку	Прямых на плоскости
б)	$<$	Действительных чисел	м)	Отличаться ровно одной буквой	Слов русского языка
в)	$\leqslant$	То же	н)	Равновеликость	Многоугольников на плоскости
г)	Быть подмножеством	Подмножеств трехэлементного множества	о)	Перпендикулярность	Плоскостей в пространстве
д)	Быть дочерью	Жителей Москвы	п)	Следование	Формул логики высказываний
е)	Предшествовать	Слов в толковом словаре	р)	Равносильность	То же
ж)	Быть однофамильцем	Учащихся данного техникума	с)	Противоположность	Целых чисел
з)	Сонаправленность	Лучей на плоскости	т)	Быть длиннее	Отрезков на луче, отложенных от его начала
и)	Быть ровесником	Учащихся данной группы	у)	Симметричность относительно данной оси	Точек плоскости
к)	Конгруэнтность	Окружностей на плоскости	ф)	Жить этажом выше	Жильцов одного дома

14. Установите, какими свойствами обладает каждое из отношений, заданных на $\mathbf{R}$ следующими высказывательными формами: а) $x+y=2$; б) $x-y=2$; в) $|x-y|=2$; г) $xy\geqslant 0$; д) $|x|=|y|$.

15. Определите, какими свойствами обладают отношения, изображенные на рис. 17 (стрелка от a к b означает, что aRb).

16. Даны два аргумента: $\left|\begin{array}{l} x=y \\ \underline{z=y} \\ x=z \end{array}\right.$; $\left|\begin{array}{l} x>y \\ \underline{z>y} \\ x>z \end{array}\right.$ (переменные принимают значения из $\mathbf{R}$). Очевидно, что второй из этих аргументов — неправильный, так как можно указать такой набор значе-

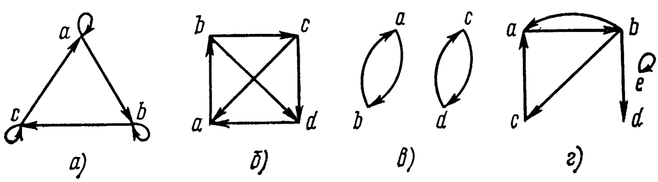

Рис. 17

ний переменных, что посылки станут истинными высказываниями, а заключение — ложным высказыванием (сделайте это!). Пользуясь свойствами отношений $=$ и $>$, докажите, что первый аргумент — правильный, и объясните, почему второй аргумент — неправильный.

5⁰. Отношения эквивалентности и отношения порядка. *Отношение, обладающее одновременно свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, называется отношением эквивалентности.*

Примерами отношений эквивалентности могут служить отношения равенства, отношения конгруэнтности и подобия геометрических фигур, отношение параллельности прямых (при условии, что совпадающие прямые считаются параллельными), отношение сонаправленности лучей, а также отношения «быть соседями по квартире», «быть тезками», «быть ровесниками».

Каждое отношение эквивалентности является в определенном смысле равенством. Так, например, отношение «быть ровесниками» означает равенство возрастов; «быть тезками» — значит иметь одинаковые (равные) имена; конгруэнтные отрезки имеют равные длины.

Если на множестве M задано отношение эквивалентности, то оно порождает разбиение этого множества на классы эквивалентности, т. е. такое разбиение, что: 1) *все элементы каждого класса попарно эквивалентны;* 2) *никакие два элемента, принадлежащие различным классам, не эквивалентны.*

Например, отношению «учиться в одной группе» на множестве учащихся техникума соответствует разбиение этого множества на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из учащихся одной группы.

Отношение, обладающее одновременно свойствами антисимметричности и транзитивности, называется отношением порядка.

Примерами отношений порядка могут служить отношения $<, >$, $\leqslant, \geqslant$ на множестве действительных чисел, «быть старше» на каком-либо множестве людей, «быть подмножеством» на каком-либо множестве множеств.

Различают отношения нестрогого и строгого порядков.

Отношением нестрогого порядка называется рефлексивное отношение порядка. Отношения $\leqslant, \geqslant$, $\subset$ являются отношениями нестрогого порядка.

Отношением строгого порядка называется антирефлексивное отношение порядка. Отношения $<, >$, «быть старше» являются отношениями строгого порядка.

Связанное отношение порядка называется *отношением совершенного порядка.* Отношения $<, >$ на $\mathbf{R}$ являются отношениями строгого совершенного порядка; отношения $\leqslant, \geqslant$ на $\mathbf{R}$ — отношения нестрогого совершенного порядка; отношение «быть старше» является строгим совершенным порядком на множестве людей, среди которых нет ровесников.

УПРАЖНЕНИЯ

17. Какие отношения из упр. 13 являются отношениями эквивалентности? отношениями порядка?

18. Приведите по два примера отношений эквивалентности из: математики; обыденной жизни.

19. Выпишите классы эквивалентности, образующиеся при разбиении множества $\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, порожденного отношением $|x| = |y|$.

20. Какие из отношений, изображенных на рис. 18, являются отношениями: а) эквивалентности; б) порядка?

21. Какие из отношений, изображенных на рис. 18, являются отношениями: а) строгого совершенного порядка; б) нестрогого совершенного порядка; в) строгого порядка, не являющегося совершенным; г) нестрогого порядка, не являющегося совершенным?

22. Докажите, что всякое транзитивное и антирефлексивное отношение является отношением порядка.

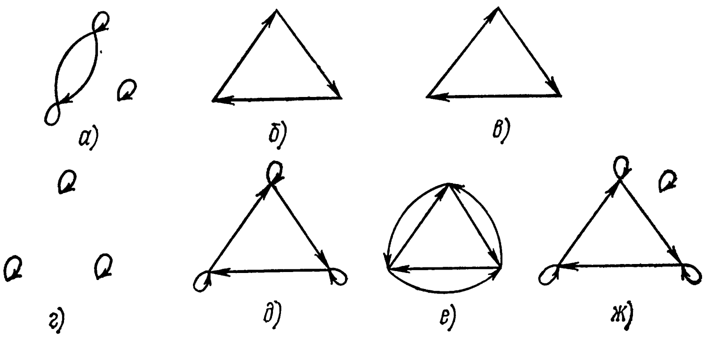

Рис. 18

§ 10. КВАНТОРЫ

1°. Кванторы общности и существования. Чтобы превратить высказывательную форму в высказывание, достаточно вместо каждой из переменных, входящих в форму, подставить какое-нибудь ее значение. В начале курса был упомянут и другой способ превращения высказывательной формы в высказывание, который мы теперь рассмотрим более подробно.

Пусть, например, дана высказывательная форма «Число x — простое», где x принимает значения из $\mathbf{N}$. Предложение «Для всякого x из $\mathbf{N}$ истинно, что x — простое число» утверждает, очевидно, то же самое, что предложение «Всякое и натуральное число — простое», и, следовательно, является высказыванием (ложным). Предложение «Существует такое x, что x — простое число» равнозначно предложению «Существует простое число» и является истинным высказыванием.

Выражение «для всякого x» называется *квантором общности* по переменной x (вместо x может быть любая другая переменная). Это выражение кратко записывается так: $\forall x$. Запись $\forall x(\Phi(x))$ означает «для всякого [значения] $x\,\Phi(x)$ — [истинное высказывание]». Слова в квадратных скобках иногда опускаются.

Выражение «существует x такое, что...» называется *квантором существования* по переменной x (вместо x может быть любая переменная) и обозначается так: $\exists x$.

Запись $\exists x(\Phi(x))$ означает «существует [значение] x такое, что $\Phi(x)$ [при этом значении — истинное высказывание]».

Вместо слова «всякий» употребляют слова «каждый», «любой»; вместо «существует» — слова «есть», «найдется», «некоторые», «хотя бы один».

Следует обратить внимание на специфику употребления слова «некоторый» в логике и математике. В обычном языке, говоря «некоторые», обычно имеют в виду «по меньшей мере один, но не все»; в логике же слово «некоторые» означает «по меньше мере один, но, может быть, и все».

Переход от формы $\Phi(x)$ к высказыванию $\forall x(\Phi(x))$ или к высказыванию $\exists x(\Phi(x))$ называется *операцией квантификации* формы $\Phi(x)$ или просто квантификацией $\Phi(x)$. В результате квантификации переменная в форме перестает быть переменной в прежнем смысле этого слова, т. е. символом, на место которого можно подставлять объекты из некоторого множества.

Будем называть переменную x в $\Phi(x)$ после применения к ней операции квантификации *связанной переменной.* Таким образом, в высказываниях $\forall x(\Phi(x))$ и $\exists x(\Phi(x))$ переменная x — связанная. В отличие от связанных переменных переменные в первоначальном смысле слова называются *свободными переменными.*

Переменные связывают не только кванторы. Связанными являются переменные в таких, например, выражениях, как $\{x|x>0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(^1/_n)$ $\int\limits_a^b f(x)dx$; подставлять вместо них числа не имеет смысла.

Если множество M значений переменной является конечным, например $M=\{a_1;\ a_2;\ldots;a_n\}$, то: 1) высказывание $\forall x(\Phi(x))$ имеет тот же смысл, что и высказывание $\Phi(a_1) \wedge \Phi(a_2) \wedge \ldots \wedge \Phi(a_n)$; 2) высказывание $\exists x(\Phi(x))$ имеет тот же смысл, что и высказывание $\Phi(a_1) \vee \Phi a_2 \vee \ldots$ $\ldots \vee \Phi(a_n)$.

Пусть, например, в высказывательной форме $\Phi(x)$ «x — четное число» переменная принимает значения из множества $\{a; b; c\}$. Утверждение $\forall x(\Phi(x))$ равнозначно утверждению «a—четное число, и b—четное число, и c — четное число». Утверждение $\exists x(\Phi(x))$ означает то же, что и дизъюнкция «a — четное число, или b — четное число, или c — четное число».

Множество значений переменной, входящей в форму, подвергаемую квантификации, можно указать заранее либо включить это указание в запись квантора. Например, высказывание «Для всякого натурального числа x $1/x \leqslant x$» можно записать так: $(\forall x \in \mathbf{N})\ (1/x \leqslant x)$.

Заметим, что $(\forall x \in M)(\Phi(x))$ можно заменить на $\forall x(x \in M \rightarrow \Phi(x))$, а $(\exists x \in M)(\Phi(x))$ — на $\exists x(x \in M \wedge \wedge \Phi(x))$. В самом деле: $(\forall x \in M)(\Phi(x))$ означает, что все элементы множества M обладают свойством Φ, т. е. $M \subset \overline{\Phi}$, а это имеет место тогда и только тогда, когда импликация $x \in M \rightarrow \Phi(x)$ тождественно истинна; $(\exists x \in M)(\Phi(x))$ означает, что множество $M \cap \overline{\Phi}$ непусто, т. е. существует x, принадлежащий M и обладающий свойством Φ.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Прочтите следующие записи, заменив символические обозначения кванторов общности и существования их словесными выражениями. Определите значения истинности данных высказываний ($M_x = M_y = \mathbf{R}$): а) $\forall x(x^2 - 1 = (x-1)(x+1))$; б) $\exists x(|x| \leqslant 0)$; в) $\forall x(|x| > 0)$; г) $\exists y(5+y=5)$; д) $\exists y(y^2+y+1=0)$; е) $\forall y(y^2+ +y+1>0)$; ж) $\exists x(x^3 < x^2)$.

2. Запишите следующие предложения, используя символы кванторов: а) «Существует число x такое, что $x+10=2$»; б) «По крайней мере одно число y является корнем уравнения $ay^2+by+c=0$»; в) «Каково бы ни было число z, $z+0=z$»; г) «Уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы один корень»; д) «Любое число либо положительно, либо отрицательно, либо равно нулю».

3. Запишите символически следующие высказывания и определите их значения истинности: а) «Всякое число, умноженное на нуль, есть нуль»; б) «Произведение любого числа и единицы равно этому числу»; в) «Существует число, которое больше своего квадрата»; г) «Квадрат любого числа неотрицателен»; д) «Модуль любого числа положителен».

4. Свяжите переменную квантором так, чтобы получилось истинное высказывание (если возможно, сделайте это двумя способами): а) «$4x+5$ — простое число»; б) $\cos y \neq 2$; в) «В четырехугольнике z все углы — прямые»; г) «Простое число p — натуральное»; д) «Простое число p — четное»; е) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$; ж) $|x|=-|x|$; з) $\lg x^2=2\lg x$; е) $x/x=1$; ж) «Все пути из пункта y ведут на север».

5. Запишите символически следующие предложения, включив указание о множестве значений переменной в запись квантора: а) «Уравнение $f(x)=\varphi(x)$ имеет положительный корень»; б) «Существует рациональное число, квадрат которого равен a»; в) «Всякое натуральное число либо четно, либо нечетно»; г) «Всякое рациональное число представимо в виде дроби p/q, где p — целое число, а q — натуральное»; д) «Некоторые натуральные числа кратны 7».

6. Предложения из упр. 5 запишите символически в иной форме, используя импликацию либо конъюнкцию.

7. Следующие предложения сформулируйте и запишите в виде конъюнкций либо дизъюнкций: а) «Каждое слагаемое суммы $a+b+$ $+c$ четно»; б) «Существует натуральный корень уравнения $2x=p$, не превосходящий 4»; в) «Среди чисел, бо́льших 1758 и меньших 1963, найдется простое»; г) «Множеству M принадлежат все буквы слова «цирк».

2°. Квантификация многоместных высказывательных форм. Операция квантификации применима и к многоместным высказывательным формам, т. е. к формам с более чем одной переменной.

Пусть $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ — n-местная высказывательная форма. Переход от предложения $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ $\ldots, x_n)$ к предложению $\forall x_i(\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ либо к предложению $\exists x_i(\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ называется *квантификацией формы* $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n)$ *по переменной* x_i.

Если $n>1$, то в результате квантификации по одной из переменных n-местная высказывательная форма становится $(n-1)$-местной высказывательной формой: одна из переменных связывается квантором.

Так, например, $\forall x(xy=0)$ — одноместная высказывательная форма со свободной переменной y. При значении y, равном нулю, эта форма становится истинным высказыванием; если же $y\neq 0$, то получится ложное высказывание.

Можно связать любым из кванторов и переменную y. Тогда получим $\exists y \forall x(xy=0)$ — истинное высказывание либо $\forall y \forall x(xy=0)$ — ложное высказывание.

Вообще, для двуместной высказывательной формы возможны следующие 8 комбинаций:

1) $\forall x \forall y(\Phi(x, y))$ — «для всякого x и для всякого y $\Phi(x, y)$»;

2) $\forall y \forall x(\Phi(x, y))$ — «для всякого y и для всякого x $\Phi(x, y)$»;

3) $\exists x \exists y(\Phi(x, y))$ — «существует x и существует y такие, что $\Phi(x, y)$»;

4) $\exists y \exists x(\Phi(x, y))$ — «существует y и существует x такие, что $\Phi(x, y)$»;

5) $\forall y \exists x(\Phi(x, y))$ — «для всякого y существует x такой, что $\Phi(x, y)$»;

6) $\exists x \forall y(\Phi(x, y))$ — «существует x такой, что для всякого y $\Phi(x, y)$»;

7) $\forall x \exists y(\Phi(x, y))$ — «для всякого x существует y такой, что $\Phi(x, y)$»;

8) $\exists y \forall x(\Phi(x, y))$ — «существует y такой, что для всякого x $\Phi(x, y)$».

Высказывания 1) и 2), а также 3) и 4) имеют один и тот же смысл и, следовательно, одно и то же значение истинности.

Если истинно высказывание 6), то, очевидно, истинно и высказывание 5), но не наоборот.

Если истинно высказывание 8), то, очевидно, истинно и высказывание 7), но не наоборот.

Например, $\forall x \exists y(x+y=0)$ (всякое число имеет противоположное) — истинное высказывание, $\exists y \forall x(x+y=0)$ (существует число, противоположное любому числу) — ложное высказывание.

Итак, *одноименные кванторы можно менять местами; разноименные кванторы нельзя менять местами; если истинно высказывание* $\exists x \forall y(\Phi(x, y)$, *то истинно и высказывание* $\forall y \exists x(\Phi(x, y))$.

Последнее утверждение справедливо для любой высказывательной формы с двумя переменными, т. е. из предложения, имеющего форму $\exists x \forall y(\Phi(x, y))$, следует предложение, имеющее форму $\forall y \exists x(\Phi(x, y))$; это следование не зависит от множества, на котором рассматриваются предложения, а определяется только их логической формой.

Очевидно, что высказывание, полученное из высказывательной формы Φ квантификацией ее по всем переменным квантором общности, истинно тогда и только тогда, когда эта форма обращается в истинное высказывание при подстановке вместо переменных любых наборов их значений, т. е. является тождественно истинной на данном множестве.

Поскольку отношения следования и равносильности между высказывательными формами связаны с тождественно истинными импликациями и эквиваленциями, эти отношения можно выразить с помощью кванторов общности.

Утверждение $\Phi_1(x) \Rightarrow \Phi_2(x)$ имеет тот же смысл, что и утверждение $\forall x(\Phi_1(x) \rightarrow \Phi_2(x))$. Утверждение $\Phi_1(x) \Leftrightarrow \Phi_2(x)$ можно записать так: $\forall x(\Phi_1(x) \leftrightarrow \Phi_2(x))$.

Утверждения о наличии следования или равносильности между высказывательными формами Φ_1 и Φ_2 с более чем одной переменной записываются аналогично: формы $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ и $\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2$ квантифицируются кванторами общности по всем переменным.

УПРАЖНЕНИЯ

8. Прочтите следующие высказывания и определите их значения истинности (переменные принимают значения из **R**): а) $\forall x \forall y((x+y)^2=x^2+2xy+y^2)$; б) $\forall x \exists y(x/y=1)$; в) $\exists y \forall x(xy=0)$; г) $\exists x \exists p(2x-1=px)$; д) $\forall x \exists p(2x-1=px)$; е) $(\forall x \neq 0)(\exists T \neq 0)(x^2=(x+T)^2)$; ж) $(\exists T \neq 0)(\forall x \neq 0)(x^2=(x+T)^2)$.

9. Запишите символически следующие высказывания и определите их значения истинности: а) «Для любых чисел x и y $(x^2-y^2) \times (x-y)=x+y$»; б) «Для любых чисел x и y $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$»; в) «Для любых чисел a и b $ab=ba$»; г) «Для любых чисел a и b $a-b=b-a$»; д) «Для всякого числа a существует такое число b, что $a-b=b-a$»; е) «Существуют такие числа a и b, что $a-b=b-a$»; ж) «Для любых чисел x и y существует такое число z, что $x+y=z$»; з) «Существует такое число z, что для любых чисел x и y $x+y=z$»; и) «Существуют такие числа x и z, что для всякого y $x+y=z$»; к) «Существуют такие числа x и z, что для всякого y $xy=z$»; л) «Не существует наибольшего натурального числа».

10. Запишите символически следующие высказывания: а) «Функция 2^x положительна при любом значении аргумента»; б) «Функция 2^x принимает любое положительное значение».

11. Определите, при каких значениях свободных переменных следующие высказывательные формы становятся истинными высказываниями $(M_x=M_y=M_z=\mathbf{R})$: а) $\forall x=(xy=x)$; б) $\forall y(x+y=y)$; в) $\exists x(xy=0)$; г) $\exists x(xy=1)$; д) $\forall x \exists y(xy=z)$.

12. Придумайте два высказывания, имеющие соответственно форму $\forall x \exists y(\Phi(x, y))$ и $\exists y \forall x(\Phi(x, y))$, так чтобы: а) оба они были истинными; б) оба они были ложными; в) первое было ложным, а второе — истинным.

13. Даны предложения: «Каждую задачу решил по крайней мере один ученик» и «По крайней мере один ученик решил каждую задачу». Имеют ли эти предложения один и тот же смысл? Следует ли хотя бы одно из них из другого? Почему?

14. Придумайте два высказывания, имеющие соответственно форму $\forall x \exists y(\Phi(x, y))$ и $\exists x \forall y(\Phi(x, y))$, чтобы: а) оба были истинными; б) оба были ложными; в) первое было истинным, а второе — ложным; г) первое было ложным, а второе — истинным.

15. Запишите с помощью кванторов общности следующие утверждения: а) «Из перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует равенство нулю их скалярного произведения»; б) «Равенство двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — достаточное условие равенства $\vec{0}$ их векторного произведения»; в) $(x \in A \cap B) \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$; г) «Из того, что x — сын y и y — женщина, следует, что y — мать x».

16. Определите, какие из следующих высказываний истинны (все переменные принимают значения из $\mathbf{R}$): а) $\forall x(x^2 > x \leftrightarrow (x > 1 \vee x < 0))$; б) $\forall a((\exists x(ax = 2)) \leftrightarrow a \neq 0)$; в) $\forall a \forall b \forall c((\exists x(ax^2 + bx + c = 0)) \leftrightarrow b^2 - 4ac \geqslant 0)$; г) $\forall x((x > 2 \wedge x > 3) \leftrightarrow 2 < x \leqslant 3)$; д) $\forall x((x > 2 \wedge x < 1) \leftrightarrow x \neq x)$; е) $\forall x((x > 1 \wedge x < 2) \leftrightarrow x = x)$; ж) $\forall a \forall b((\exists x(x > a \wedge x < b)) \leftrightarrow a < b)$.

3⁰. Отрицание предложений с кванторами. Известно, что часто для построения отрицания некоторого предложения достаточно предпослать сказуемому этого предложения отрицательную частицу «не». Например, отрицанием предложения «Река x впадает в Черное море» является предложением «Река x не впадает в Черное море». Годится ли этот прием для построения отрицаний предложений с кванторами? Рассмотрим примеры.

Предложения «Все птицы летают» и «Все птицы не летают» не являются отрицаниями друг друга, так как они оба ложны.

Предложения «Некоторые птицы летают» и «Некоторые птицы не летают» не являются отрицаниями друг друга, так как они оба истинны.

Таким образом, предложения, полученные добавлением частицы «не» к сказуемому предложений «Все x суть P» и «Некоторые x суть P», не являются отрицаниями этих предложений.

Универсальным способом построения отрицания данного предложения является добавление словосочетания «неверно, что» в начале предложения. Отрицанием предложения «Все птицы летают» является предложение «Неверно, что все птицы летают»; но это предложение имеет тот же смысл, что и предложение «Некоторые птицы не летают». Отрицанием предложения «Некоторые птицы летают» является предложение «Неверно, что некоторые птицы летают», которое имеет тот же смысл, что и предложение «Все птицы не летают».

Условимся отрицание предложения $\forall x(\Phi(x))$ записывать как $\overline{\forall x(\Phi(x))}$, а отрицание предложения $\exists x(\Phi(x))$ — как $\overline{\exists x(\Phi(x))}$.

Очевидно, что предложение $\overline{\forall x(\Phi(x))}$ имеет тот же смысл, а следовательно, то же значение истинности, что и предложение $\exists x(\overline{\Phi}(x))$, а предложение $\overline{\exists x(\Phi(x))}$ — тот же смысл и то же значение истинности, что и предложение $\forall x(\overline{\Phi}(x))$. Иначе говоря,

$$\overline{\forall x(\Phi(x))} \text{ равносильно } \exists x\left(\overline{\Phi}(x)\right);$$

$$\overline{\exists x(\Phi(x))} \text{ равносильно } \forall x\left(\overline{\Phi}(x)\right).$$

Из этих соотношений вытекает п р а в и л о: *для того чтобы построить отрицание высказывания, начинающегося с квантора общности (существования), достаточно заменить его квантором существования (общности) и взять отрицание предложения, стоящего за квантором.*

Кванторы общности и существования называют *двойственными* относительно друг друга.

Выясним теперь, как строить отрицание предложения, начинающегося с нескольких кванторов, например такого, как $\forall x \exists y \forall z(\Phi(x, y, z))$.

Последовательно применяя сформулированное выше правило, получим: $\overline{\forall x \exists y \forall z(\Phi(x, y, z))}$ равносильно $\exists x(\overline{\exists y \forall z(\Phi(x, y, z))})$, что равносильно $\exists x \forall y (\overline{\forall z (\Phi(x, y, z))})$, что равносильно $\exists x \forall y \exists z(\overline{\Phi}(x, y, z))$.

Таким образом, имеет место п р а в и л о: *чтобы построить отрицание предложения, начинающегося с кванторов, достаточно каждый квантор заменить двойственным, а отрицание перенести на предложение, стоящее за кванторами.*

УПРАЖНЕНИЯ

17. Сформулируйте следующие высказывания с помощью квантора существования: а) «Не всякое уравнение имеет действительный корень»; б) «Не для любого x $\lg x > 1$»; в) «Не все умеют играть в шахматы»; г) «Не каждое простое число нечетно»; д) «Не всякая река впадает в море».

18. Запишите каждое из данных в предыдущем упражнении высказываний и его переформулировку с помощью квантора существования символически, воспользовавшись обозначениями: $P(u)$ — «Уравнение u имеет действительный корень», $L(x)$ — «x умеет играть в шахматы», $Q(y)$ — «Простое число y нечетно», $R(m)$ — «Река m впадает в море».

19. Сформулируйте следующие высказывания с помощью квантора общности: а) «Не существует числа x такого, что $x+1=x$»; б) «Нет человека, не имеющего матери»; в) «Не найдется числа, удовлетворяющего уравнению $x^2+1=0$»; г) «Ни один человек не бессмертен».

20. Запишите каждое из данных в предыдущем упражнении высказываний и его переформулировку символически, введя обозначения: $Q(y)$ — «Человек y имеет мать», $R(y)$ — «Человек y бессмертен».

21. Запишите символически и сформулируйте отрицания высказываний, данных в упр. 19.

22. Сформулируйте отрицания следующих высказываний в утвердительной форме (т. е. так, чтобы отрицание данного высказывания не начиналось со слов «неверно, что» или «не»): а) «Из всякого положения есть выход»; б) «Во всяком городе есть район, во всех домах которого не менее шести этажей»; в) «В каждой стране найдется город, у всех жителей которого один и тот же цвет глаз»; г) «В каждом городе есть район, в каждой школе которого есть класс, в котором ни один ученик не занимается спортом»; д) «Существует книга, в которой есть страница, в каждой строке которой найдется хотя бы одна буква «а».

4⁰. Численные кванторы. В математике часто встречаются выражения вида «по меньшей мере n» («хотя бы n»), «не более чем n», «n и только n» («ровно n»), где n — натуральное число.

Эти выражения, называемые *численными кванторами,* имеют чисто логический смысл; они могут быть заменены равнозначными выражениями, не содержащими числительных и состоящими только из логических терминов и знака $=$, обозначающего тождество (совпадение) объектов.

Пусть $n=1$. Предложение «По меньшей мере один объект обладает свойством P» имеет тот же смысл, что и предложение «Существует объект, обладающий свойством P», т. е.

$$\exists x(P(x)). \tag{1}$$

Предложение «Не более чем один объект обладает свойством P» равнозначно предложению «Если есть объекты, обладающие свойством P, то они совпадают», т. е.

$$\forall x\, \forall y\, (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y). \tag{2}$$

Предложение «Один и только один объект обладает свойством P» равнозначно конъюнкции предложений (1) и (2).

Рассмотрим теперь случай $n=2$. Предложение «По меньшей мере два объекта обладают свойством P» означает то же, что и предложение «Существуют несовпадающие объекты, обладающие свойством P», т. е.

$$\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y). \quad (3)$$

Предложение «Не более чем два объекта обладают свойством P» равнозначно предложению «Каковы бы ни были объекты x, y и z, если все они обладают свойством P, то по меньшей мере два из них совпадают», т. е.

$$\forall x \forall y \forall z ((P(x) \wedge P(y) \wedge P(z)) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z)). \quad (4)$$

Предложение «Два и только два объекта обладают свойством P» совпадают по смыслу с конъюнкцией предложений (3) и (4).

Совершенно аналогично обстоит дело с численными кванторами при $n>2$.

УПРАЖНЕНИЯ

23. Запишите следующие предложения в форме, не содержащей числительных: а) «Уравнение $ax=b$ имеет хотя бы один корень»; б) «Уравнение $ax=b$ имеет не более чем один корень»; в) «Уравнение $ax=b$ имеет один и только один корень»; г) «Множество M содержит по меньшей мере один элемент»; д) «Множество M содержит не более одного элемента»; е) «Множество M содержит ровно один элемент»; ж) «Уравнение $f(x)=0$ имеет не более двух корней»; з) «Уравнение $f(x)=0$ имеет по меньшей мере два корня»; и) «Уравнение $f(x)=0$ имеет два и только два корня»; к) «Множество M содержит два и только два элемента»; л) «Множество M содержит ровно три элемента».

24. Заполните пропуски численными кванторами так, чтобы получились истинные высказывания: а) «Каждой прямой принадлежат ... две различные точки»; б) «Каждая плоскость содержит ... три точки, не лежащие на одной прямой»; в) «Через каждые три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит ... плоскость»; г) «Две плоскости, имеющие общую точку, имеют ... общую прямую, проходящую через эту точку»; д) «Две различные прямые пересекаются в ... точке»; е) «Через две данные пересекающиеся прямые проходит ... плоскость»; ж) «Простое число имеет ... различных делителя».

25. Запишите высказывания из предыдущего упражнения символически, использовав следующие обозначения: A_i (i — натуральное число) — переменные для точек, l_i — переменные для прямых, P_i — переменные для плоскостей, n_i — переменные для натуральных чисел; $n_1 \vdots n_2$ — «n_2 — делитель n_1».

26. Сформулируйте в утвердительной форме отрицания предложений: а) «По меньшей мере один объект обладает свойством P»; б) «Не более чем один объект обладает свойством P»; в) «Один и только один объект обладает свойством P»; г) «По меньшей мере два объекта обладают свойством P»; д) «Не более чем два объекта обладают свойством P»; е) «Два и только два объекта обладают свойством P». Запишите эти отрицания символически, используя только логические символы и знак $=$.

5⁰. Символическая запись определений и теорем. С помощью символов кванторов удобно записывать формулировки определений и теорем. Пользуясь такой записью, легко описать объекты, не подходящие под данное определение либо не удовлетворяющие условию теоремы.

Например, определение предела последовательности «Число A называется пределом последовательности (a_n), если для всякого положительного числа ε существует такое число N, что для всякого n, большего N, $|A-a_n|<\varepsilon$» записывается так*:

$$A = \lim a_n \overset{\mathrm{df}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+)\, \exists N \forall n\, (n > N \rightarrow |a_n - A| < \varepsilon).$$

Отсюда легко получить необходимое и достаточное условие истинности утверждения «Число A не является пределом последовательности (a_n)»:

$$A \neq \lim a_n \Longleftrightarrow (\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+)\, \forall N \exists n\, (n > N \wedge |a_n - A| \geqslant \varepsilon).$$

Таким образом, утверждение «Число A не является пределом последовательности (a_n)» раскрывается так: «Существует положительное число ε такое, что для всякого числа N найдется такое n, большее N, что $|a_n-A|\geqslant\varepsilon$».

Если последнее утверждение справедливо для всякого числа A, то последовательность (a_n) вообще не имеет предела.

---

* Знак $\overset{\mathrm{df}}{\Longleftrightarrow}$ означает «равносильно по определению».

УПРАЖНЕНИЯ

27. Запишите символически: а) определение «Последовательность (a_n) называется ограниченной, если существует такое число M, что модуль любого члена последовательности не превосходит этого числа»; б) необходимое и достаточное условие истинности утверждения «Последовательность (a_n) не является ограниченной».

28. Запишите символически: а) определение «Точка x_0 из области определения функции f называется точкой максимума этой функции, если существует такая δ-окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности $f(x)<f(x_0)$»; б) необходимое и достаточное условие того, что точка x_0 из области определения функции f не является точкой максимума этой функции.

29. Для функции f, определенной на множестве M, запишите символически: а) определение «Функция f возрастает на M, если на этом множестве из $x_1<x_2$ следует $f(x_1)<f(x_2)$»; б) определение «Функция l называется невозрастающей на множестве M, если на этом множестве из $x_1>x_2$ следует $f(x_1)\leqslant f(x_2)$»; в) необходимое и достаточное условие того, что функция f не возрастает на M.

30. Приведите пример функции, которая: а) является невозрастающей на $\mathbf{R}$; б) не возрастает на $\mathbf{R}$, но не является невозрастающей.

31. Запишите символически: а) определение «Функция f называется четной, если вместе с каждым значением x из области определения l значение $-x$ также входит в область определения этой функции и для любого x из области определения f выполняется равенство $f(-x)=f(x)$»; б) необходимое и достаточное условие истинности утверждения «Функция f не является четной».

32. Выполните задание предыдущего упражнения для нечетной функции. (Если в определении четной функции равенство $f(-x)=f(x)$ заменить равенством $f(-x)=-f(x)$, то получим определение нечетной функции.)

33. Может ли одна и та же функция быть: а) четной и нечетной; б) четной и не четной?

34. Запишите символически: а) определение «Функция f называется периодической, если существует такое число T, не равное нулю, что для любого x из области определения f числа $x+T$ и $x-T$ также входят в область ее определения и выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$; б) необходимое и достаточное условие истинности утверждения «Функция f не периодическая».

35. Докажите, что функция f не является периодической, если: а) $f(x)=\lg x$; б) $f(x)=x^2$.

36. Для каждого из шести свойств бииарных отношений (рефлексивности, симметричности, транзитивности, антирефлексивности, антисимметричности, связанности) запишите символически необходимое и достаточное условие того, что отношение R, заданное на множестве M, этим свойством: а) обладает; б) не обладает.

37. Для каждого из свойств бинарных отношений приведите пример отношения, не обладающего этим свойством.

38. Исходя из определения «Множества M_1 и M_2 совпадают, если каждый элемент M_1 принадлежит M_2 и каждый элемент M_2 принадлежит M_1», докажите, что пустое множество — единственное.

§ 11. ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Понятие формулы логики предикатов введем аналогично тому, как это было сделано в логике высказываний.

Зададим сначала *алфавит* символов, из которых будем составлять формулы:

предметные переменные: x, y, z, x_i, y_i, z_i (i — натуральное число);

предикатные буквы: P, Q, R, P_i, Q_i, R_i (i — натуральное число);

символы операций — отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции: $\bar{\ }$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;

символы $\forall$ и $\exists$;

вспомогательные символы: (,) — скобки; , — запятая.

Выражения вида T и $T(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, где T — предикатная буква, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — предметные переменные, будем соответственно называть *нуль-местным* и *n-местным предикатными символами.*

Дадим теперь определение формулы логики предикатов:

1. *Всякий нуль-местный предикатный символ — формула.*

2. *Всякий n-местный предикатный символ — формула.*

3. *Если F — формула, а ξ — предметная переменная, то $\forall\xi(F)$ и $\exists\xi(F)$ — формулы.*

4. *Если F_1 и F_2 — формулы, то $\overline{F_1}$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ — формулы.*

5. *Никаких других формул в логике предикатов нет.*

Формулы, определенные в п. 1 и 2, называются *элементарными.* Формулы, не являющиеся элементарными, будем называть *составными.*

Примеры. 1. P; $Q(x, y, z)$; $R(x_1, x_2)$ — элементарные формулы.

2. $\forall x(P(x, y, z))$; $\forall x(\exists y(P(x, y, z)))$; $(Q \wedge \overline{\forall x(P(x, y, z))})$ — составные формулы.

Формула F в формулах вида $\forall\xi(F)$ или $\exists\xi(F)$ называется соответственно *областью действия квантора* $\forall\xi$ или $\exists\xi$.

Для упрощения записей условимся:

1) опускать в формуле F наружные скобки, если эта формула не является составной частью другой формулы;

2) опускать скобки в формулах вида $\forall\xi(F)$ и $\exists\xi(F)$, если F, в свою очередь, — формула одного из этих видов, либо элементарная формула;

3) вместо $\overline{T(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)}$, $\overline{\forall\xi(F)}$ и $\overline{\exists\xi(F)}$ писать соответственно $\overline{T}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\overline{\forall}\xi(F)$ и $\overline{\exists}\xi(F)$.

После принятых упрощений формулы из примера 2 примут вид

$$\forall x P(x, y, z);\ \forall x \exists y P(x, y, z);\ Q \wedge \overline{\forall} x P(x, y, z).$$

Рассмотрим формулу $Q(x) \wedge \forall x P(x, y)$. В этой формуле первое вхождение переменной x — свободное, а второе и третье вхождения — связанные. Вообще, вхождение переменной в формулу называется *связанным*, если оно находится в области действия квантора по этой переменной или является вхождением в этот квантор; вхождение, не являющееся связанным, называется *свободным* (область действия квантора всегда однозначно определяется по виду формулы).

Переменная называется *свободной в формуле*, если хотя бы одно ее вхождение в этой формуле свободно.

Формулы логики высказываний всегда можно рассматривать как высказывательные формы с высказывательными переменными либо как высказывания. Формулы логики предикатов становятся высказывательными формами с предметными переменными или высказываниями, если задать непустое множество M значений, которые можно приписывать предметным переменным, входящим в формулу, а каждому n-местному предикатному символу поставить в соответствие n-местный предикат, определенный на множестве M (причем двум различным n-местным предикатным символам с одинаковыми предикатными буквами ставится в соответствие один и тот же предикат); нуль-местным предикатным символам независимо от выбора множества M приписывается нуль-местный предикат, т. е. одно из значений истинности (*и* либо *л*).

Если формула не содержит свободных предметных переменных, то, задав множество M и приписав предикатным символам конкретные предикаты, мы получим высказывание (точнее говоря, значение истинности). Если же в формуле есть свободные вхождения предметных переменных, то получим высказывательную форму от этих переменных, которая станет высказыванием, если подставить вместо свободных вхождений переменных элементы множества M. Обращение формулы в высказывание описанным выше способом будем называть *интерпретацией* этой формулы.

Формулы без свободных предметных переменных называются *замкнутыми*, а формулы, содержащие свободные предметные переменные, — *открытыми*.

Интерпретация замкнутой формулы состоит из следующих шагов:

1) задается множество M;

2) каждой предикатной букве, входящей в n-местный предикатный символ, ставится в соответствие n-местный предикат, определенный на M;

3) каждому нуль-местному предикатному символу приписывается одно из значений истинности.

Если формула — открытая, то добавляется еще один шаг:

4) каждому свободному вхождению переменной ставится в соответствие элемент множества M.

Пример. Дадим интерпретацию открытой формуле

$$\exists y \forall x P(x, y) \to (Q(x) \wedge R).$$

1) Пусть $M = \{1; 2\}$.

2) Предикатной букве P поставим в соответствие двуместный предикат, заданный таблицей

(1; 1)	(1; 2)	(2; 1)	(2; 2)
и	*л*	*и*	*л*

а предикатной букве Q — предикат, заданный таблицей

1	2
и	*л*

3) Предикатному символу R припишем значение u.

4) Свободному вхождению переменой x припишем значение 1.

При такой интерпретации данная формула обращается в истинное высказывание (принимает значение u).

В самом деле, антецедент данной импликации принимает значение u, так как, согласно таблице для P, высказывания $P(1;\ 1)$ и $P(2;\ 1)$ — истинные, т. е. существует значение y (равное 1) такое, что при всяком значении x (равном 1 или 2) $P(x,\ y)$ истинно. Консеквент также принимает значение u, так как Q (1) и R истинны.

Если же, например, переменной x приписать значение 2, либо символу R — значение $л$, либо букве Q — предикат «быть четным числом», оставляя все остальное без изменения, то всякий раз данная формула будет получать значение $л$ (проверьте!).

Формулы, истинные при любой интерпретации, называются *общезначимыми.*

В частности, все тавтологии логики высказываиий являются общезначимыми формулами логики предикатов.

Как известно, всегда можно установить, является ли формула логики высказываний тавтологией или нет, составив таблицу истинности. Что же касается логики предикатов, то для ее формул, вообще говоря, не существует общего способа (алгоритма) установления общезначимости. Общезначимость некоторых формул можно установить с помощью рассуждений.

Докажем, например, общезначимость формулы $\forall xP(x)\to P(y)$. Допустим, что в некотором множестве M букве P поставлен в соответствие такой предикат, что $P(y)$ при некотором значении y принимает значение $л$. Но тогда и $\forall xP(x)$ получит значение $л$. Следовательно, формула $\forall xP(x)\to P(y)$ общезначима.

Для доказательства того, что формула не общезначима, достаточно указать одну интерпретацию, дающую этой формуле значение $л$.

Докажем, например, что формула $\exists xP(x)\to \forall xP(x)$ не общезначима. Пусть $M=\{1;\ 2\}$, P — предикат «быть простым числом». Тогда $\exists xP(x)$ — имеет значение u, а $\forall xP(x)$ — значение $л$, т. е. вся формула примет значение $л$.

Подобно тому, как отношения следования и равносильности между формулами логики высказываний определялись с помощью тавтологий, эти же отношения между формулами логики предикатов определяются с помощью общезначимых формул.

Формулы F_1 и F_2 называются р а в н о с и л ь н ы м и $(F_1\equiv F_2)$, *если формула $F_1\longleftrightarrow F_2$ общезначима.*

Говорят, что формула F_2 с л е д у е т *из формулы $F_1 (F_1|=F_2)$, если формула $F_1\to F_2$ общезначима.*

Если в тавтологию логики высказываний вместо высказывательной переменной всюду подставить одну и ту же формулу логики предикатов, то полученная таким образом формула будет общезначимой.

Отсюда следует, что при такой подстановке все равносильности логики высказываний становятся равносильностями логики предикатов.

Таким образом, всякую формулу логики предикатов, содержащую символы $\to$ и $\leftrightarrow$, можно преобразовать в равносильную ей формулу, не содержащую этих символов.

С помощью равносильностей, полученных из законов де-Моргана, и равносильностей $\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P}(x)$, $\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P}(x)$, отрицание любой составной формулы можно преобразовать в равносильную формулу, содержащую под знаком отрицания только элементарные формулы. Формула F_1, равносильная формуле F и не содержащая символов $\rightarrow, \longleftrightarrow$, а также составных формул под знаком отрицания, называется *приведенной формой* формулы F.

Пример. Преобразуем в приведенную форму формулу $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow Q(x)$:

$$\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow Q(x) \equiv \overline{\forall x \exists y P(x, y)} \vee Q(x) \equiv \exists x \forall y \overline{P}(x, y) \vee Q(x).$$

Формула называется *предваренной*, если все кванторы стоят в ее начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы.

Примеры. 1. $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$ — предваренная формула.

2. Формула $\forall x (\exists y Q(y) \vee P(x))$ не является предваренной.

Можно доказать, что любую формулу F, содержащую кванторы, можно преобразовать в равносильную ей предваренную формулу F_1. Формула F_1 называется *предваренной формой* формулы F.

С помощью формул логики предикатов можно формализовать элементарные высказывания, учитывая их внутреннюю (субъектно-предикатную) структуру. Например, элементарное высказывание «Каждый человек имеет мать», содержащее предикат «быть матерью», формализуется так. Обозначим буквой P двуместный предикат, определенный на M^2, где M — множество людей, и ставящий в соответствие значение u парам (мать; ребенок). Тогда высказывательной форме «x — мать y» соответствует символ $P(x, y)$, а данному высказыванию отвечает формула $\forall y \exists x P(x, y)$. Можно было бы формализовать это высказывание иначе, введя одноместный предикат Q — «быть человеком». Тогда данному высказыванию соответствовала бы формула $\forall y (Q(y) \rightarrow \exists x P(x, y))$.

Рассмотрим предложения: «В Москве живет женщина, имеющая брата в Ленинграде»; «В Ленинграде живет мужчина, имеющий сестру в Москве». Ясно, что они равносильны (каждое из них следует из другого), однако формализация их на уровне логики высказываний не обнаруживает этой равносильности; на этом уровне каждое из предложений формализуется либо как элементарное (P, Q), либо как конъюнкция двух элементарных высказываний ($P_1 \wedge P_2$, $Q_1 \wedge Q_2$), где P_1—«Женщина живет в Москве», P_2—«Женщина имеет брата в Ленинграде», Q_1—«Мужчина живет в Ленинграде», Q_2 — «Мужчина имеет сестру в Москве»; формулы P, Q, так же как и формулы $P_1 \vee P_2$, $Q_1 \vee Q_2$, не следуют одна из другой.

Формализация на уровне логики предикатов обнаруживает равносильность данных предложений.

Введем обозначения: $P_1(x)$—«x — женщина»; $P_2(x)$—«x — живет в Москве»; $Q_1(x)$—«x — мужчина»; $Q_2(x)$—«x живет в Ленинграде»; $R(x, y)$—«x — мать y». (Будем считать братом и сестрой (братьями, сестрами) людей, имеющих общую мать.) Тогда высказыванию «В Москве живет женщина, имеющая брата в Ленинграде» соответствует формула

$$\exists x (P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \exists y (Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge \exists z (R(z, x) \wedge R(z, y)))),$$

равносильная формуле

$$\exists y (Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge \exists x (P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \exists z (R(z, x) \wedge R(z, y)))),$$

соответствующей высказыванию «В Ленинграде живет мужчина, имеющий сестру в Москве».

УПРАЖНЕНИЯ

1. Укажите свободные и связанные вхождения каждой из переменных в следующих формулах:

а) $\forall x P(x) \to P(y)$; б) $\forall x (P(x) \to Q(y)) \vee \exists y R(x, y)$;

в) $\forall x ((P(x) \to Q(y)) \vee \exists y P(x, y))$.

2. Интерпретируйте следующие формулы так, чтобы получилось истинное высказывание; ложное высказывание:

а) $P \vee \exists x Q(x)$; б) $P \wedge \forall y Q(y)$; в) $P(x) \vee \forall x \exists y P(x, y)$;

г) $(P(x) \wedge Q) \leftrightarrow (\exists x \exists y R(x, y))$; д) $\forall x \forall y (P(x, y) \to P(y, x))$.

3. Покажите, что: а) любая интерпретация формулы $P(x) \to P(y)$, связанная с одноэлементным множеством M, приводит к истинному высказыванию; б) если M — произвольное двухэлементное множество, то не всякая интерпретация формулы $P(x) \to P(y)$ дает истинное высказывание.

4. Выполните задание предыдущего упражнения для формул: а) $P(y) \to \forall x P(x)$; б) $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$.

5. Среди данных формул укажите те, которые при любой интерпретации истинны; ложны:

а) $P(x) \wedge \overline{P}(x)$; б) $Q(x) \vee \overline{Q}(x)$; в) $(\overline{\forall} x P(x)) \leftrightarrow (\exists x \overline{P}(x))$;

г) $(\overline{\exists} x P(x)) \leftrightarrow (\forall x \overline{P}(x))$; д) $(P(x) \wedge \overline{P}(x)) \to Q(x)$;

е) $P(x) \to (Q(x) \vee \overline{Q}(x))$; ж) $(\exists x \forall y P(x, y)) \to \forall y \exists x P(x, y)$;

з) $(\forall x \forall y P(x, y)) \leftrightarrow (\forall y \forall x P(x, y))$; и) $(\exists x \exists y P(x, y)) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (\exists y \exists x P(x, y))$; к) $(P(x) \vee \overline{P}(x)) \to (Q(x) \wedge \overline{Q}(x))$.

6. Докажите общезначимость формул *:

а) $P(y) \to \exists x P(x)$; б) $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$;

в) $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$;

г) $\forall x (F \vee Q(x)) \leftrightarrow (F \vee \forall x Q(x))$;

д) $\exists x (F \wedge Q(x)) \leftrightarrow (F \wedge \exists x Q(x))$; е) $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to$
$\to \forall x (P(x) \vee Q(x))$;

ж) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \to (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$.

7. Докажите, что следующие формулы не общезначимы:

а) $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$;

---

* F — формула, не имеющая свободных вхождений x.

б) $(\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$;

в) $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$.

8. Запишите: а) отношение следования; б) отношение равносильности между формулами, вытекающие из общезначимости формул, данных в упр. 5 и 6.

9. Преобразуйте в приведенную форму следующие формулы:

а) $\exists x\, \exists y\, P(x, y) \leftrightarrow (Q(x) \to R(y))$;

б) $\overline{\exists x\, \forall y\, P(x, y) \vee Q(z)} \leftrightarrow \overline{P(z) \vee R(y)}$;

в) $\overline{(\overline{\forall x}\, P(x) \wedge Q(y)) \leftrightarrow \exists x\, \forall y\, (R(x) \to Q(y))}$.

10. Преобразуйте следующие формулы в предваренную форму с помощью равносильностей из упр. 8:

а) $\exists x\, \forall y\, P(x, y) \vee \overline{\forall x}\, \exists z\, Q(x, z)$;

б) $\forall x\, (\exists y\, (P(y) \wedge Q(x, y)) \wedge \exists z\, (R(z) \wedge Q(x, z)))$;

в) $\exists x\, ((\exists y\, P(y) \wedge Q(x)) \to \forall z\, (R(z) \wedge Q(x, z)))$.

11. Формализуйте следующее высказывание, учитывая его внутреннюю (субъектно-предикатную) структуру: «Каждый человек имеет отца и мать».

12. Докажите, что предложения «В Москве живет женщина, имеющая брата в Ленинграде» и «В Ленинграде живет мужчина, имеющий сестру в Москве» равносильны в логике предикатов (см. с. 109), т. е. докажите, что

$$\exists x\, (P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \exists y\, (Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge \exists z\, (R(z, x) \wedge R(z, y)))) \equiv$$
$$\equiv \exists y\, (Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge \exists x\, (P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \exists z\, (R(z, x) \wedge R(z, y)))).$$

13. Выразите с помощью языка логики предикатов, что из предложения «По крайней мере один ученик решил каждую задачу» следует предложение «Каждую задачу решил по крайней мере один ученик».

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

§ 1

1. Предложения е) и ж) — не высказывания и не высказывательные формы. **2.** Предложения а), д), к), п) — истинные высказывания. **4.** г) Для всякого y $y^2 \geqslant 0$; з) существует четырехугольник, в котором противоположные стороны конгруэнтны. **6.** б) Элементарные предложения — «Я буду изучать английский»; «Я буду изучать немецкий»; логическая связка «или». **7.** Например: «Если Солнце всходит на востоке, то оно заходит на западе». **8.** Воспользуйтесь определениями конъюнкции и дизъюнкции. **9.** A истинно, B ложно, C истинно, D ложно. **10.** в) См. рис. 19; е) см. рис. 20.

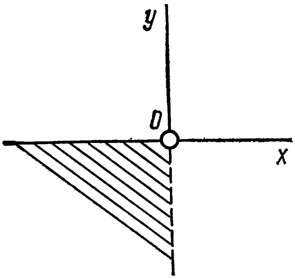

Рис. 19

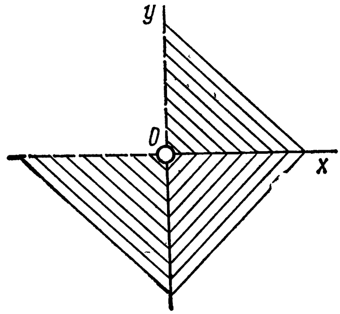

Рис. 20

Искомое множество точек заштриховано. Прерывистая линия, изображающая часть границы области, н кружок вокруг точки O указывают, что эти точки не входят в искомое множество. **11.** а) Высказывательная форма ни при каком значении n не станет истинным высказыванием, так как из двух последовательных натуральных чисел всегда одно нечетно (не является четным), т. е. при любом n одно из составляющих предложений — ложное высказывание и, следовательно, конъюнкция ложна; б) дизъюнкция этих предложений ни при каком значении n не стаиет ложным высказыванием. **12.** б) «a четно, и b четио, и c четно»; г) «Число a принадлежит множеству A или множеству B». **13.** а) $a \neq 0$ и $b \neq 0$; б) $a = 0$ или $b = 0$. **14.** а) «Луна — не спутник Марса» или «Неверно, что Луна — спутник Марса»; в) $5 \leqslant 2$; д) «Существует простое четное число». **15.** а) Предложения не являются отрицаниями друг друга, так как они могут одновременно стать ложиыми высказываниями (при $a = 0$); б) предложения являются отрицаииями друг друга, так как если одно из них истинно, то второе ложно. **16.** а) $a \geqslant b$. **17.** д) Отрицание данного высказывания. «Существует четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, не являющийся ромбом». Это высказывание истинно, поскольку такой четы-

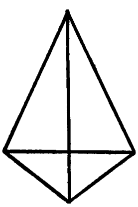

Рис. 21

рехугольник действительно существует (рис. 21); следовательно, исходное высказывание ложно; е) опровергающим данное утверждение примером может служить слово «длиниошеее». **18.** Воспользуйтесь определеиииями импликации и эквиваленции. Например: импликация д) истинна, так как ее антецедент ложен; эквиваленция и) ложна, так как одно из составляющих ее высказываний истинно, а второе — ложно. **23.** б) Не может: если «x — брат y» стаиовится истинным высказыванием, то «x и y — родственники» также становится истинным высказыванием; в) может: если x — брат y, а y — сестра x, то антецедент истинен, а консеквент ложеи. **24.** а) Да (любой день, кроме понедельника); б) нет. **25.** У к а з а н и е. Утверждение будет опровергнуто в том и только в том случае, если найдется карточка с гласной на одной стороне и нечетным числом на другой. **26.** г) «Если многоугольник является треугольником, то в него можно вписать окружность»; е) «Если $x \in A$, то $x \in B$». **27.** У к а з а н и е. Воспользуйтесь ответом к п. е) упр. 26.

§ 2

1. Выражения, не являющиеся формулами логики высказываний: x, F, X_i, F_1, a, $X \wedge Y \vee Z$, $(X \wedge Y) \leftrightarrow Z) \vee X_3$. **2.** У к а з а н и е. Выпишите сначала элементарные формулы, а затем — все более и более сложные; всего таких формул, включая данную, девять. **3.** а) $X \wedge Y$; в) $X \vee Y$; д) $\overline{X}$; ж) $\overline{X} \vee \overline{Y}$; и) $\overline{X} \wedge \overline{Y}$; л) $X \rightarrow (Y \wedge Z)$; н) $(X \wedge Y \wedge \overline{Z}) \rightarrow \overline{X}_1$; п) $X \leftrightarrow (Y \vee Z)$; с) $X \rightarrow (Y \wedge Z)$. **4.** **У к а з а н и е.** Замените переменные любыми предложениями, а знаки логических операций — соответствующими им словами. Одинаковые переменные заменяют одним и тем же предложением, различные — разными предложеииями. Формуле г) соответствует, например, такое предложение: «Неверно, что Николай будет учиться или работать, тогда и только тогда, когда он не будет учиться и не будет работать». **5.** Любое высказывание, соответствующее формуле г), истинно. **6.** а) $\overline{X \wedge Y}$, $\overline{X} \vee \overline{Y}$; $\overline{X \wedge Y} \leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})$; б) $X \rightarrow Y$, X, Y; в) $л \rightarrow Y$, $Y \rightarrow и$, Y. **7.** Выражения, принадлежащие языку-объекту: а) «2 — простое число» и «2 — четное число»; б) «хлеб»; в) peace; г) «копейка», «копье»; д) $ax^2+bx+c=0$; е) true, false. **8.** а)

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{X} \rightarrow Y$	$X \wedge Y$	$\overline{X \wedge Y}$	$(\overline{X} \rightarrow Y) \vee (\overline{X \wedge Y})$
и	и	л	и	и	л	и
и	л	л	и	л	и	и
л	и	и	и	л	и	и
л	л	и	л	л	и	и

в) См. таблицу на с. 114. **9.** д) Число n четно или делится на 3. **11.** Формулы б), г), ж), з). **13.** Предложения б), д), ж), з). **14.** Формула а) — не тавтология, так как при истинных X и Y она принимает значение $л$.

$((X_1$	$\rightarrow$	$X_2)$	$\rightarrow$	$X_3)$	$\wedge$	$(X_4$	$\leftrightarrow$	$X_1)$
и	и	и	и	и	и	и	и	и
и	и	и	и	и	л	л	л	и
и	и	и	л	л	л	и	л	и
и	и	и	л	л	л	л	л	и
и	л	л	и	и	и	и	и	и
и	л	л	и	и	л	л	л	и
и	л	л	и	л	и	и	и	и
и	л	л	и	л	л	л	л	и
л	и	и	и	и	л	и	л	л
л	и	и	и	и	и	л	и	л
л	и	и	л	л	л	и	л	л
л	и	и	л	л	л	л	и	л
л	и	л	и	и	л	и	л	л
л	и	л	и	и	и	л	и	л
л	и	л	л	л	л	и	л	л
л	и	л	л	л	л	л	и	л

§ 3

1. Высказывания а), б), в), д), е), ж), з), и), к), л). 2. Формулы а) и г), б) и в), д) и з), е) и ж). 3. P_1 и P_4, P_2 и P_5, P_3 и P_6, Q_1 и Q_4, Q_2 и Q_3. 4. Согласно определению эквиваленции: а) для любой формулы $\overline{F}$ $F \longleftrightarrow F$ — тавтология; б) для любых формул F_1 и F_2, если $F_1 \leftrightarrow F_2$ — тавтология, то $F_2 \longleftrightarrow F_1$ — тавтология; в) для любых формул F_1, F_2 и F_3, если $F_1 \leftrightarrow F_2$ — тавтология и $F_2 \leftrightarrow F_3$ — тавтология, то $F_1 \leftrightarrow F_3$ — тавтология. 5. Да, на основании свойств симметричности и транзитивности. 6. Если $F_1 \leftrightarrow F_2$ — тавтология, то $\overline{F}_1 \leftrightarrow \overline{F}_2$ — тавтология. 7. Не имеет, согласно закону противоречия. 8. Предложения «Хожу на голове» и «Хожу на ногах», а также предложения «Хожу без сапог» и «Хожу в сапогах» в данном случае не противоречат друг другу, так как относятся к разным объектам. 9. Не зависит, согласно закону исключенного третьего. 10. Если обозначить утверждение вида «N украл машину» первой буквой имени, стоящего на месте N, то результат допроса и дополнительного расследования можно выразить так: дизъюнкция показаний $Л \vee Т \vee \overline{Ж} \vee \overline{Т}$ истинна, и если истинно одно из показаний, то ложны все остальные. Согласно закону исключенного третьего, Т истинно либо $\overline{Т}$ истинно; значит, Л ложно и $\overline{Ж}$ ложно, откуда следует, что Ж истинно, т. е. машину украл Жорж. 11. б) «2 — простое число». 12. а) «Треугольник ABC — не прямоугольный или не равнобедренный»; б) «Число 9 — нечетное и не простое»; в) «Число m нечетно или число n нечетно»; г) «Число r — не простое и число s — не простое»; д) «Неверно, что $\left[\begin{matrix} a=3 \\ b=2 \end{matrix}\right.$» ; е) «Неверно, что я высплюсь и не опоздаю». 13. а) «Если четырехугольник — не ромб, то его диагонали не перпендикулярны или не делят его углы пополам»; е) «Если не A или не B, то не C и не D». 14. а) «Он знает математику и немецкий язык или математику и французский язык»; в) «Число n

делится на 2 или одновременно на 3 и на 5». **16.** $(Y\vee X)(\overline{Y}\vee X)\equiv$ $\equiv Y\vee X\overline{X}\equiv Y\vee л\equiv Y$. **17.** Закон исключенного третьего, равносильность $X\wedge и\equiv X$, закон де Моргана и закон двойного отрицания, закон дистрибутивности, закон идемпотентности. **18.** а) X; в) XY. **19.** Указания. в) Замените XYZ равносильной (согласно закону идемпотентности) формулой $XYZ\vee XYZ\vee XYZ$; д) сначала примените закон де Моргана. **20.** $\overline{X}Y$; б) $\overline{X}$; в) X. **21.** Указание. Формализуйте инструкцию. Соответствующая ей формула представляет собой дизъюнкцию пяти конъюнкций трех различных переменных, каждая из которых входит в конъюнкцию под знаком отрицания или без него. Упростите формулу. Сформулируйте упрощенную инструкцию. **22.** Указание. Упростите конъюнкцию высказанных пожеланий с учетом, что на одном и том же по порядку уроке не могут быть разные предметы. Результат упрощения покажет, что всем высказанным пожеланиям удовлетворяют два различных распределения предметов по урокам. **23.** Показания совместимы; виновен B. **24.** $(\overline{X}\vee Y)(X\vee\overline{Y}\vee Z)(\overline{X\vee Z})\vee л$. **28.** Формула г). **29.** а) «Париж расположен на Сене и белые медведи не живут в Африке». **30.** Предположение можно сформулировать так: «Человек талантлив, если его предки — выдающиеся личности». Последняя фраза есть отрицание этого утверждения. **31.** Указание. Составьте формулу, соответствующую решению студента; отрицание этой формулы преобразуйте так, чтобы знаки отрицания были только над элементарными формулами; полученную формулу переведите на естественный язык. **32.** Члены волейбольной секции обязаны состоять в секции плавания и не могут быть членами шахматной секции. **33.** а) $X\wedge Y\equiv\overline{\overline{X}\vee\overline{Y}}$, $X\to Y\equiv\overline{\overline{\overline{X}\vee Y}}$, $X\leftrightarrow Y\equiv\overline{\overline{\overline{\overline{X}\vee Y}}\vee\overline{\overline{\overline{Y}\vee X}}}$; б) $X\wedge Y\equiv\overline{\overline{\overline{X}\to\overline{Y}}}$, $X\vee Y\equiv$ $\equiv\overline{X}\to Y$, $X\leftrightarrow Y\equiv\overline{X\to Y\to\overline{Y\to X}}$. **34.** а) $X\mid Y$. **35.** а) $X\vee Y\equiv$ $\equiv(X|X)|(Y|Y)$; б) $X\to Y\equiv X|(Y|Y)$. **36.** «Петр не едет на Урал или Николай едет в Сибирь».

§ 4

2. е) «Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб». **3.** Предложения а), в), е), ж), з). **4.** в) «Если треугольник не равнобедренный, то никакие два его угла не конгруэнтны»; ж) «Если точка — центр симметрии параллелограмма, то в ней пересекаются его диагонали». Указания. В предложении в) нужно выявить скрытую дизъюнкцию, в предложении г) — конъюнкцию. Предложения ж) и з) переформулируйте в виде импликаций. **5.** а) «Если четырехугольник — не параллелограмм, то две его противоположные стороны не конгруэнтны или не параллельны»; в) «Если никакие два угла треугольника не конгруэнтны, то этот треугольник не равнобедренный»; г) «Если сумма нечетна, то хотя бы одно ее слагаемое нечетно»; з) «Если в треугольнике квадрат длины большей стороны не равен сумме квадратов длин двух других сторон, то треугольник не прямоугольный». **6.** Указание. Докажите теорему «Если m четно или n четно, то mn четно», равносильную данной согласно закону контрапозиции. **7.** Предложения б) и в). **8.** Ответ Коли равносилен тому, что сказали родители. Петя и Галя разными словами сказали одно и то же.

9. Слово «обратно» неуместио, так как предложения равносильны согласно закону контрапозиции. 10. Пусть X означает «Некоторое явление существует в природе», а Y — «Это явление может воспроизвести человек». Тогда данным предложениям соответствуют равносильные формулы $X \to Y$ и $\overline{Y} \to \overline{X}$, откуда следует, что слово «наоборот» здесь неуместно. 11. а) «Необходимым условием конгруэнтности прямоугольников является равенство их площадей»; б) «Достаточным условием равенства площадей прямоугольников является их конгруэнтность». 12. «Если треугольники конгруэнтны, то они равновелики». 13. «Если каждое слагаемое четно, то сумма четна». 14. а) «Если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны»; б) «Для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были перпендикулярны». 15. а) «Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке»; б) «Дифференцируемость функции в точке — достаточное условие ее непрерывности в этой точке». Иначе: «Для того чтобы функция была непрерывной в точке, достаточно, чтобы она была дифференцируемой в этой точке». 16. «Для того чтобы параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны»; «Для того чтобы диагонали параллелограмма были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы он был ромбом». 17. «Если два отрезка конгруэнтны, то их длины равны»; «Если длины двух отрезков равны, то они конгруэнтны». 18. а) Необходимое и достаточное; б) не необходимое и не достаточное; в) необходимое и не достаточное; г) не необходимое и достаточное. 19. а) «Для того чтобы импликация была истинной, достаточно, чтобы ее антецедент был ложен»; б) «Для того чтобы импликация была ложной, необходимо, чтобы ее консеквент был ложен»; в) «Для того чтобы импликация была ложной, необходимо и достаточно, чтобы ее антецедент был истинен, а консеквент ложен»; г) «Для того чтобы импликация была истинной, необходимо и достаточно, чтобы ее антецедент был ложен или консеквент истинен». 20. а) «Формула логики высказываний — тавтология тогда и только тогда, когда эта формула принимает значение *и* при любых наборах значений входящих в нее переменных»; д) «Натуральное число — простое тогда и только тогда, когда оно имеет ровно два различных делителя». 22. «Прямоугольник, называется квадратом, если его смежные стороны конгруэнтны»; «Прямоугольник называется квадратом, если его диагонали взаимно перпендикулярны».

§ 5

1. В случаях а), в), г), д), з). 2. Указание. Для доказательства можно использовать, например, формулы из п. а) упр. 1. 3. а) Если F — тавтология, то, какова бы ни была формула F_1, импликация $F_1 \to F$ в силу истинности консеквента тождественно истинна, т. е. $F_1 \models F$. 7. Если $F_1 \to F_2$ — тавтология и $F_2 \to F_1$ — тавтология, то, согласно, равносильности $F_1 \leftrightarrow F_2 \equiv (F_1 \to F_2)(F_2 \to F_1)$ и определению конъюнкции, $F_1 \leftrightarrow F_2$—тавтология, т. е. F_1 и F_2 равносильны. Докажите обратное с помощью закона контрапозиции. 10. Следует, так как из формулы $X \to Y$ следует формула $\overline{Y} \to \overline{X}$; заключение не всегда истинно, так как не всегда истинна посылка. 11. $(X \to Y)\,\overline{Y} \to \overline{X}$ — тавтология; $(X \to Y)\,\overline{X} \to \overline{Y}$ — не тавтология: при

значениях *л* и *и* для X и Y соответственно формула принимает значение *л* (проверьте!). **12.** Аргумент правильный. **13.** а) Нет; б) да. Указание. Сформулируйте теорему Пифагора в виде импликации; возьмите ее в качестве посылки аргументов, заключениями которых являются соответственно утверждения а) и б). Проверьте аргументы. **14.** Нельзя, так как аргумент — неправильный (см. упр. 11). **15.** Аргументы а), б), д) — правильные. **16.** а) Либо оба аргумента — правильные, либо оба — неправильные; б) да (см. с. 46); в) да (см. с. 46); г) заключение истинно; д) хотя бы одна из посылок ложна; е) аргумент неправильный. **17.** Аргумент правильный. **18.** Рассуждение неправильно: заключение не следует из посылок. **19.** Нельзя. Указание. Сформулируйте данную теорему в виде импликации. **20.** Подразумеваемая посылка «Настоящий мужчина — не трус». Переформулировав посылки и заключение в виде импликаций, получим аргумент, имеющий форму

$$\begin{array}{|l} X\to Y \\ \underline{Y\to\overline{Z}} \\ Z\to\overline{X} \end{array}$$

. Этот аргумент — правильный. **21.** Решение. Пусть аргумент с посылками $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и заключением P — неправильный и $F_1, F_2, \ldots, F_n, F$ — соответственно формулы посылок и заключения. Тогда F не следует из $F_1 \wedge \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$, т. е. формула $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \to F$ — не тавтология; значит, согласно определениям импликации и конъюнкции, существует набор значений переменных, входящих в формулы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ и F, при которых каждая из формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$ принимает значение *и*, а формула F — значение *л*. Обратное докажите с помощью закона контрапозиции. **22.** а) Правильный; б) неправильный; в) правильный; г) неправильный; д) неправильный. **23.** Обязан. Чтобы в этом убедиться, достаточно доказать правильность аргумента

$$\begin{array}{|l} \overline{X}\to\overline{Y} \\ \underline{X\to(Y\wedge Z).} \\ Y\to Z \end{array}$$

§ 6

1. $F_1: (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z)(\overline{X} \vee Y \vee Z)(X \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv (\overline{X} \vee Z(X \vee Y \vee \vee \overline{Z})$; $F_2: X\overline{Y}Z \vee X\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} \equiv \overline{Y}(X \vee \overline{Z})$. **2.** б) $XY \vee \overline{X}\,\overline{Y}$; $(X \vee \vee Y)(X \vee \overline{Y})$; г) $X\overline{Y}Z \vee X\overline{Y}\,\overline{Z} \vee XY\overline{Z} \vee \overline{X}Y\overline{Z} \vee \overline{X}YZ \vee XYZ \vee \vee \overline{X}\,\overline{Y}Z$; $X \vee Y \vee Z$. **3.** $XY \vee X\overline{Y} \vee \overline{X}Y \vee \overline{X}\,\overline{Y}$. **4.** Указание. Таких таблиц 16. **6.** Пусть X означает «Выход ведет на свободу», а Y — «Ты правдив». Искомый вопрос F должен быть таков, чтобы на него был дан ответ «да» в том и только в том случае, когда выход ведет на свободу. Составим таблицу:

X	Y	Желаемый ответ	F
и	*и*	да	*и*
и	*л*	да	*л*
л	*и*	нет	*л*
л	*л*	нет	*и*

Таблице соответствует формула $XY \vee \bar{X}\bar{Y}$, равносильная $X \longleftrightarrow Y$. Искомый вопрос: «Правда ли что этот выход ведет на свободу тогда и только тогда, когда ты правдив?». **10.** е) $(X \to Z) XY \equiv (\bar{X} \vee Z) \wedge \wedge XY \equiv \bar{X}XY \vee XYZ$. **11.** е) $(X \longleftrightarrow Y) \wedge \overline{XZ} \equiv (\bar{X} \vee Y)(X \vee \vee \bar{Y})(\bar{X} \vee \bar{Z}) \equiv (\bar{X} \vee Y \vee Z\bar{Z})(X \vee \bar{Y} \vee Z\bar{Z})(\bar{X} \vee \bar{Z} \vee Y\bar{Y}) \equiv (\bar{X} \vee \vee Y \vee Z)(\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z})(X \vee \bar{Y} \vee Z)(X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z})(\bar{X} \vee \bar{Z} \vee Y)(\bar{X} \vee \bar{Z} \vee \vee \bar{Y}) \equiv (\bar{X} \vee Y \vee Z)(\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z})(X \vee \bar{Y} \vee Z)(X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z})(\bar{X} \vee \bar{Y} \vee \vee \bar{Z})$. **13.** Пусть каждый член к. н. ф. формулы F содержит переменную вместе с ее отрицанием; тогда к. н. ф. формулы F представляет собой конъюнкцию тавтологий и, следовательно, сама является тавтологией, т. е. F — тавтология. Пусть какой-либо член к. н. ф. формулы F не содержит никакой переменной вместе с ее отрицанием; тогда найдется такой набор значений переменных, при которых этот член, а следовательно, и к. н. ф. формулы F принимают значение *л*. Следовательно, F — не тавтология. **14.** Формулы а) и в) — тавтологии. Для формулы а) имеем $(X \longleftrightarrow Y) \vee (\bar{X}Z \to Y) \equiv (\bar{X} \vee Y)(X \vee \bar{Y}) \vee \vee (X \vee \bar{Z} \vee Y) \equiv (\bar{X} \vee Y \vee X \vee \bar{Z} \vee Y)(X \vee \bar{Y} \vee X \vee \bar{Z} \vee Y)$. **16.** а) $(\bar{X} \vee Y)$, $(\bar{Y} \vee X)$, $(\bar{X} \vee \bar{Y})$, $(\bar{X} \vee Y)(X \vee \bar{Y})$, $(\bar{X} \vee Y)(\bar{X} \vee \bar{Y})$, $(X \vee \bar{Y})(\bar{X} \vee \bar{Y})$, $(\bar{X} \vee Y)(X \vee \bar{Y})(\bar{X} \vee \bar{Y})$. б) Указание: $(X \to Y) \wedge \wedge (Y \vee Z)(XY \longleftrightarrow Z) \equiv (\bar{X} \vee Y \vee Z)(\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z})(X \vee Y \vee Z)(\bar{X} \vee \vee \bar{Y} \vee Z)(X \vee Y \vee \bar{Z})(X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z})$. **17.** «Данное число не делится на 2, или не делится на 5, или делится на 10»; «Данное число делится на 2, или не делится на 5, или делится на 10»; «Данное число делится на 2, или не делится на 5, или не делится на 10»; «Если данное число делится на 5, то оно делится на 10»; «Данное число не делится на 5 или делится на 2 тогда и только тогда, когда делится на 10»; «Если данное число делится на 5, то оно делится на 2»; «Если данное число делится на 5, то оно делится на 2 и на 10». **19.** а) $\bar{X} \vee Z$; б) $Y \longleftrightarrow \bar{Z}$. **20.** а) $X_4 \vee X_1\bar{X}_4$; б) $X_3(X_2 \longleftrightarrow X_4)$; **22.** Например, $\bar{X} \vee Z \models X \vee \bar{X} \vee Z$.

§ 7

1. Для рис. 6,*а*: $X_1X_2X_3$; для рис. 6,*в*: $(X_1X_2 \vee X_3)X_4$; для рис. 6,*д*: $X_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2$. **2.** а) См. рис. 22. Указание. Формулы б) и в) преобразуйте в равносильные им формулы, не содержащие знаков $\to$ и $\longleftrightarrow$. **3.** $(X_1X_3 \vee \bar{X}_1\bar{X}_3)X_1 \vee X_2$.

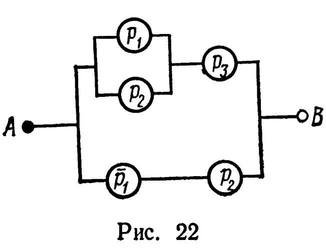

Рис. 22

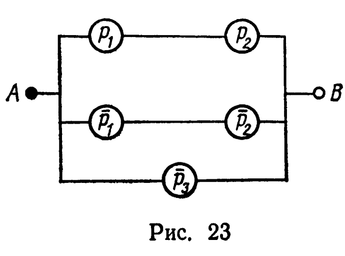

Рис. 23

4. $X_1(\bar{X}_2 \vee X_3)$ — формула, описывающая упрощенную схему. 5. См. рис. 23. 6. а) См. рис. 24. 7. а) Цепь замкнута при любых состояниях переключателей (рис. 25, *а*); б) цепь разомкнута при любых

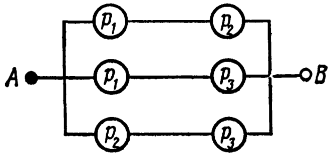

Рис. 24

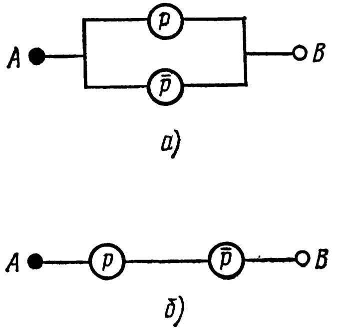

Рис. 25

состояниях переключателей (рис. 25, *б*). 8. Указание. См. упр. 6а). 9. Таблица истинности для формулы, соответствующей искомой схеме, имеет вид

X	Y	Z	F
и	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*и*
и	*л*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*л*
л	*и*	*и*	*л*
л	*и*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*л*
л	*л*	*л*	*л*

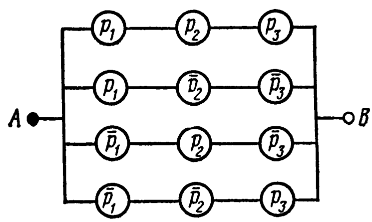

Рис. 26

10. См. рис. 26. 11. Указание. Для составления формулы, описывающей искомую схему, достаточно выписать те строки ее таблицы истинности, в которых формула имеет значение *и*.

§ 8

1. Аргументы б) и г). 2. $P(1)$ — *л*, $P(6)$ — *и*. Однозначное натуральное число x четно. 3. $Q(1)$ — *л*, $Q(2)$ — *и*, $Q(6)$ — *л*. 4. Таблица для предиката P_1:

конь	стол	зал	чаша	барабан
и	*и*	*и*	*и*	*л*

5. Утверждение а). 6. а) Да; б) нет. 7. а) Да; б) нет. 9. а) $\{2\cdot3;\ 2\cdot5;\ 3\cdot5\}$; б) $\{23;\ 32;\ 25;\ 52;\ 35;\ 53\}$. 10. а) $\{(1;\ 5);\ (1;\ 6);\ (2;\ 5);\ (2;\ 6);\ (3;\ 5);\ (3;\ 6);\ (4;\ 5);\ (4;\ 6)\}$, $\{(5;\ 1);\ (5;\ 2);\ (5;\ 3);\ (5;\ 4);\ (6;\ 1);\ (6;\ 2);\ (6:\ 3);\ (6;\ 4))\}$. 12. $M^3 = \{м;\ а\}^3 = \{ммм;$ мма; мам; маа; амм; ама; аам; ааа$\}$. 13. $m_1 m_2 \ldots m_n$. 14. $n! = 1\cdot2\times\times3 \ldots n$. 17. а) $\{1;\ 2;\ 3\}^2$; б) $Q_1((2,3))$—*л*; $Q_2((2,3))$—*и*. 18. а) 6; б) 3. 19. $n!$. 20. а) $\{3;\ 6;\ 9\}$; б) $\{3;\ 6;\ 9;\ 12\}$; в) $\varnothing$; г) $\{-1;\ -2\}$; д) $]-\infty,\ +\infty[$; ; е) $\varnothing$; ж) $\{(0;\ 0)\}$. 25. а) — г) равны. 26. а) Любое подмножество множества натуральных чисел, не содержащее четных чисел, не кратных трем, и нечетных чисел, кратных трем. Например, $\{1;\ 5;\ 6;\ 7;\ 11;\ 12\}$; множество истинности каждого предиката $\{6;\ 12\}$; б) любое множество чисел, не содержащее -3. 27. Указание. Предикаты, заданные на одном и том же множестве, различаются только множествами истинности. 28. а) Неравносильны на **R** и на **Q**; равносильны на **Z** и на **N**. 29. а) Нет; б) нет; в) нет; г) да; д) нет. 32. а) Любое множество чисел, кратных одновременно 3 и 5 либо не кратных ни 3, ни 5. 33. а) $\{-2;\}$ б) $\{3\}$; в) $\{0\}$; г) $]-\infty,\ 0[$; д) $]-4,\ 4[$. 34. а) $\{35\}$; в) $]-\overline{2},\ +\infty[$. 35. а) Да; б) нет. 36. а) Например, $\{2;\ 4;\ 8;\ 3;\ 9\}$. 37. $\overline{P}=\{2;\ 3;\ 5;\ 7\}$, $\overline{Q}=\{4;\ 6;\ 8;\ 9\}$. $\overline{Q}=M\setminus\overline{P}$. 39. а) $\{0;\ 1;\ 2\}$; г) $[1,\ +\infty[$. 41. а)—в) Да. 51. а) $(x+3>3)\vee(x+3<-3)$. 52. а) Да; б) да; в) нет: при $x<2$ первая форма истинна, а вторая — ложна (см. соглашение на с. 69). 53. $\overline{P}_1=\{2;\ 3;\ 5;\ 7\}$, $\overline{P}_2=\{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$, $\overline{P}= =\{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$, $\overline{P}=\overline{P}_1\cup\overline{P}_2$. 54. а) $x^2-5x+6>0 \Longleftrightarrow (x< <2)\vee(x>3)$. 56. $\overline{P}=(M\setminus\overline{P}_1)\cup\overline{P}_2$. 58. а) $\{1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13;\ 15;\ 16;\ 17;\ 19;\ 21;\ 23;\ 25;\ 27;\ 29\}$. 61. $\overline{P}=(\overline{P}_1\cap\overline{P}_2)\cup(M\setminus\overline{P}_1)\cap \cap(M\setminus\overline{P}_2))$. 63. а) $\overline{P}_1=\{(c;\ a);\ (c;\ d);\ (d;\ b);\ (d;\ c);\ (e;\ a)\}$; $\overline{P}_2= =\{(c;\ a);\ (c;\ c);\ (d;\ a);\ (d;\ b);\ (e;\ c);\ (e;\ d)\}$ б) $Q_5=\{(c;\ a);\ (c;\ b);\ (c;\ c);\ (d;\ a);\ (d;\ b);\ (d;\ d);\ (e;\ b);\ (e;\ c);\ (e;\ d)\}$. 65. а) Из второй следует первая; в) из первой не следует вторая, из второй не следует первая; д) из первой следует вторая, из второй следует первая. 66. а) Любое подмножество множества натуральных чисел, не содержащее нечетных чисел, кратных 3. 67. Указание. Покажите, что множество решений данного неравенства есть подмножество множества решений неравенства $\sin x\cos x<0$. 68. а) $[1,\ +\infty[$; в) $]-\infty,\ 3[$; д) $[3,\ +\infty[$; ж) $]-\infty,\ -4[$. 69. $]0,\ 1]$.

§ 9

1. Формы а и к); б), е) и ж); в) и г); д), з) и и). 3. в) $P_1(x)\wedge P_2(x)\wedge P_3(x)$: $\{9\}$; $P_1(x)\wedge P_2(x)\wedge\overline{P}_3(x)$: $\{1;\ 25\}$; $\overline{P}_1(x)\wedge\overline{P}_2(x)\wedge P_3(x)$: $\{6;\ 12;\ 18;\ 24;\ 30\}$; $P_1(x)\wedge \wedge\overline{P}_2(x)\wedge P_3(x)$: $\{36\}$; $\overline{P}_1(x)\wedge P_2(x)\wedge P_3(x)$: $\{3;\ 15;\ 21;\ 27;\ 33;\ 39\}$; $P_1(x)\wedge\overline{P}_2(x)\wedge\overline{P}_3(x)$: $\{4;\ 16\}$; $\overline{P}_1(x)\wedge P_2(x)\wedge\overline{P}_3(x)$: $\{5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19;\ 23;\ 29;\ 31;\ 35;\ 37\}$; $\overline{P}_1(x)\wedge\overline{P}_2(x)\wedge \wedge\overline{P}_3(x)$: $\{2;\ 8;\ 10;\ 14;\ 20;\ 22;\ 26;\ 28;\ 32;\ 34;\ 38;\ 40\}$. 4. Прямоугольные и равнобедренные треугольники; прямоугольные и неравнобедренные треугольники; Непрямоугольные и равнобед-

ренные треугольники; Непрямоугольные и неравнобедренные треугольники. **6.** 5. **7.** а) Да; б) — е) нет. **8.** а) 37; б) 22; в) 5; г) 48; д) 39; е) 13. **9.** 66. **10.** (1; 1), (2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4). **12.** Словом «делит». **13.** а) Рефлексивно, транзитивно, антисимметрично; б) транзитивно, антирефлексивно, антисимметрично, связанно; в) рефлексивно, транзитивно, антисимметрично, связанно; г) рефлексивно, транзитивно, антисимметрично; д) антирефлексивно, антисимметрично; е) транзитивно, антисимметрично, связанно; ж) рефлексивно, симметрично, транзитивно; з) рефлексивно, симметрично, транзитивно; и) рефлексивно, симметрично, транзитивно; к) рефлексивно, симметрично, транзитивно; л) рефлексивно, симметрично; м) симметрично, антирефлексивно; н) рефлексивно, симметрично, транзитивно; о) симметрично, антирефлексивно; с) симметрично, транзитивно; т) транзитивно, антирефлексивно, антисимметрично, связанно; у) симметрично, транзитивно; ф) транзитивно, антирефлексивно, антисимметрично. **14.** а) Симметрично; б) антирефлексивно, антисимметрично; в) симметрично, антирефлексивно; г) рефлексивно, симметрично; д) рефлексивно, симметрично, транзитивно. **15.** Для рис. 17, *а*: рефлексивно, транзитивно, антисимметрично, связанно; для рис. 17, *б*: антирефлексивно, антисимметрично, связанно; для рис. 17, *в*: симметрично, транзитивно, антирефлексивно; для рис. 17, *г*: не рефлексивно, не симметрично, не транзитивно, не антисимметрично, не антирефлексивно, не связанно. **17.** Отношения эквивалентности: ж), з), и), к), н), р). Отношения порядка: а), б), в), г), е), т), ф). **19.** $\{0\}$, $\{-1; 1\}$, $\{-2; 2\}$, $\{-3; 3\}$, $\{-4; 4\}$. **20.** а) На рис. 18, *а, г*; б) на рис. 18, *б, в, г, д, ж*. 21. а) На рис. 18, *б*; б) на рис. 18, *д*; в) на рис. 18, *в*; г) на рис. 18, *г, ж*.

§ 10

1. Истинными являются высказывания а), б), г), е), ж). **2.** а) $\exists x\,(x+10=2)$; б) $\exists y\,(ay^2+by+c=0)$; в) $\forall z\,(z+0=z)$. **3.** а) $\forall x\,(x\cdot 0=0)$; в) $\exists x\,(x>x^2)$; д) $\forall x\,(|x|>0)$. Истинными являются высказывания а), б), в), г), **4.** б) $\forall y\,(\cos y\neq 2)$; д) $\exists p$ (p—простое $\wedge\ p \vdots 2$); ж) $\exists y$ (все пути из пункта y ведут на север). (Таким пунктом является Южный полюс.) **5.** а) $(\exists x\in \mathbf{R}_+)\,(f(x)=\varphi(x))$; в) $(\forall x\in\mathbf{N})\left(x \vdots 2 \vee \overline{x \vdots 2}\right)$; г) $(\forall x\in\mathbf{Q})\ (\exists p\in\mathbf{Z})(\exists q\in\mathbf{N})\ (x=p/q)$. **6.** а) $\exists x\,(x\in\mathbf{R}_+\wedge f(x)=\varphi(x))$; в) $\forall x\,(x\in\mathbf{N}\rightarrow\left(x \vdots 2\vee\overline{x \vdots 2}\right))$; г) $\forall x\,(x\in\mathbf{Q}\rightarrow\exists p\,\exists q\,(p\in\mathbf{Z}\wedge q\in\mathbf{N}\wedge x=p/q))$. **7.** а) $a \vdots 2\wedge b \vdots 2\wedge c \vdots 2$; б) $2\cdot 1=p\vee 2\cdot 2=p\vee 2\cdot 3=p\vee 2\cdot 4=p$.

8. Истинными являются высказывания а), в), г), е). **9.** а) $\forall x\forall y\left(\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=x+y\right)$; д) $\forall a\,\exists b\,(a-b=b-a)$; ж) $\forall x\,\forall y\,\exists z\,(x+y=z)$. Истинными являются высказывания б), в), д), е), ж), к), л). **10.** а) $\forall x\,(2^x>0)$; б) $(\forall y\in\mathbf{R}_+)\,\exists x\,(2^x=y)$. **11.** а) $y=1$; б) $x=0$; в) y— любое число; г) $y\neq 0$; д) $z=0$. **13.** Первое предложение следует из второго. **15.** а) $\forall\vec{a}\,\forall\vec{b}\left(\vec{a}\perp\vec{b}\rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\right)$; в) $\forall x\,\forall A\,\forall B\,(x\in A\cap B\longleftrightarrow(x\in A\wedge x\in B))$. **16.** Истинными являются высказывания а), в), г), д), ж). **17.** а) «Существует уравнение, не имеющее действительного корня»; б) $\exists x(\lg x \leqslant 1)$. **18.** д) $\exists m(\overline{R}(m))$. **19.** а) «Для любого x $x+1 \neq x$»; б) «Всякий человек имеет мать». **20.** б) $\forall yQ(y)$; в) $\forall x(x^2+1 \neq 0)$. **22.** г) «Существует город, в каждом районе которого есть школа, в каждом классе которой хотя бы один ученик занимается спортом»; д) «Во всякой книге на каждой странице есть строка, в которой нет ни одной буквы «а». **23.** $\exists x(ax=b)$; б) $\forall x_1 \forall x_2((ax_1=b \wedge ax_2=b) \rightarrow x_1=x_2)$; в) Конъюнкция предложений а) и б). **27.** а) (a_n)—ограниченная $\overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \exists M \forall n(|a_n|) \leqslant M)$; б) $\forall M \exists n(|a_n| > M)$. **29.** а) f возрастает на M $\overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} (\forall x_1 \in M)(\forall x_2 \in M)(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$. **31.** а) f — четная $\overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} (\forall x \in D(f))(-x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x))$; б) $(\exists x \in D(f))(-x \notin D(f) \vee f(-x) \neq f(x))$. **33.** а) Да; такой является всякая функция, заданная формулой $y=0$ на множестве, симметричном относительно начала координат; б) нет. **34.** а) Функция f— периодическая $\overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} (\exists T \neq 0)(\forall x \in D(f))(x+T \in D(f) \wedge x-T \in D(f) \wedge f(x+T)=f(x))$. **35.** а) Достаточно убедиться, что для данной функции ни при каком $T \neq 0$ не выполняется условие $(\forall x \in D(f))(x+T \in D(f) \wedge x-T \in D(f))$. б) Допустим, что $(\exists T \neq 0)\forall x(x^2=(x+T)^2)$; так как $x^2=(x+T)^2 \Longleftrightarrow T(2x+T)=0$, то при $x \neq -T/2$ имеем $T(2x+T) \neq 0$, т. е. $(\forall T \neq 0)\exists x(x^2 \neq (x+T)^2)$. Следовательно, функция не периодическая. **38.** Указание. Сформулируйте необходимое и достаточное условие несовпадения множеств и убедитесь, что для пустых множеств оно не выполняется.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиндикин С. Г.* Алгебра логики в задачах. М., 1972.
2. *Калбертсон Дж.* Математика и логика цифровых устройств. М., 1965.
3. *Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж.* Введение в конечную математику. М., 1955.
4. *Клини С.* Введение в метаматематику. М., 1957.
5. *Клини С.* Математическая логика. М., 1973.
6. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. М., 1969.
7. *Столл Р.* Множества, логика, аксиоматические теории. М., 1968.
8. *Столяр А. А.* Логическое введение в математику. Минск, 1971.
9. *Фрейденталь Х.* Язык логики. М., 1969.
10. *Шиханович Ю. А.* Введение в современную математику. М., 1965.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алфавит 19, 22, 106
Анализ и упрощение переключательной схемы 63, 64
Антецедент 15
Антирефлексивность 90
Антисимметричность 90
Аргумент 46

Бинарное отношение 89

Выражение импликации и эквиваленции через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание 35, 36
Высказывание 7
Высказывательная переменная 18, 19
— форма 7

Двойственные кванторы 101
— формулы 33
Декартово произведение множеств 69, 70
Дизъюнктивная нормальная форма (д. н. ф.) 54, 55
Дизъюнкция 12
— высказывательных форм 78
Достаточное условие 41

Заключение 46
Закон двойного отрицания 30, 31
— исключенного третьего 30, 31
— контрапозиции 40
— противоречия 30
— тождества 30
Законы ассоциативности 30, 31
— де Моргана 30, 31
— дистрибутивности 30
— идемпотентности 30, 31
— коммутативности 30, 31
— поглощения 33
— склеивания 33
Замкнутая формула 107
Значение переменной 7
Значения истинности 11

Идентичные контакты 63
Импликация 15, 16
— высказывательных форм 78
Инверсные контакты 63
Интерпретация формулы 107

Квантификация высказывательных форм 95, 97
Квантор общности 95
— существования 95
Классификация 86
Консеквент 16
Конъюнктивная нормальная форма (к. н. ф.) 56
Конъюнкция 12
— высказывательных форм 77

Логическая операция 12
— связка 9
Логически истинное предложение 27
Логические операции над высказывательными формами 77—79

Метаязык 22
Множество истинности предиката 72, 73

Необходимое условие 41
Неправильный аргумент 46
n-местная высказывательная форма 68
n-местный предикат 70
— предикатный символ 106

Область действия квантора 106
Обратно-противоположные предложения 38, 40
Обратные предложения 38, 39

Общезначимая формула 108
Открытая формула 107
Отношение нестрогого порядка 93
— следования между высказывательными формами 82
— — — формулами логики высказываний 44, 45
— — — — — предикатов 108
— совершенного порядка 93
— строгого порядка 93
— эквивалентности 92
Отношения как многоместные предикаты 88, 89
Отрицание 13
— высказывательной формы 77
— предложений с кванторами 100, 101

Переключательная схема 61
Переменная 7
Посылка 46
Правила классификации 87
Правильный аргумент 46
Предваренная форма формулы 109
— формула 109
Предикат 69
Предикат-отношение 71
Предикат-свойство 71
Предметные переменные 83, 84
Приведенная форма формулы 109
Принцип двойственности 33
Противоположные предложения 38, 39

Равносильное преобразование 33, 75
Равносильность высказывательных форм 74
— формул логики высказываний 29
— — — предикатов 108
Рефлексивность 89

Свободная переменная 95
— в формуле переменная 107
Свободное вхождение переменной в формулу 106
Свойства как одноместные предикаты 85
Связанная переменная 95
Связанное вхождение переменной в формулу 106
Связанность 90
Синтаксис 22
Синтез переключательной схемы 64, 65
Симметричность 89
Следование, *см.* Отношение следования
Слово 22
Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (с. д. н. ф.) 53, 55, 60
— конъюнктивная нормальная форма (с. к. н. ф.) 53, 56, 58
Составная формула 106
Составное предложение 9
Сокращенный способ проверки аргументов 49—51
Составное предложение 9
Структура определений 43, 44

Таблица истинности 11
Тавтология 27
Тождественно истинная формула 27
— истинный предикат 73
— ложный предикат 73
Транзитивность 90

Упорядоченная n-ка 69
Упрощение формулы 33

Формализованный язык 22
Формула 22
— логики высказываний 19
— — предикатов 106

Численные кванторы 102

Штрих Шеффера 36

Эквиваленция 16, 17
— высказывательных форм 79
Элементарная формула 19, 106
Элементарное предложение 9

Язык-объект 22

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Введение 4

§ *1. Логические операции* 7
1°. Высказывання н высказывательные формы (7). 2°. Элементарные и составные предложения (8). 3°. Конъюнкция и дизъюнкция (10). 4°. Отрнцание (13). 5°. Импликация и эквиваленция (15).

§ *2. Язык логики высказываний* 18
1°. Формулы логики высказываний (18). 2. Язык и метаязык (21). 3°. Составление таблиц истинности для данных формул (24). 4°. Тавтологнн (27).

§ *3. Логическая равносильность* 28
1°. Равносильность формул логики высказываний (28). 2°. Законы логики (30). 3. Равносильные преобразования. Упрощение формул (32). 4°. Выражение имплнкации и эквиваленции через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание (35).

§ *4. Обратные и противоположные предложения* . . . 37
1°. Обратные предложения (38). 2. Противоположные предложения (39). 3° Закон контрапозиции (40). 4°. Достаточные и необходимые условия (41). 5°. Структура определений (42).

§ *5. Логическое следование* 44
1°. Отношение следованчя между формулами логнки высказываний (44). 2°. Правнльные и неправильные аргументы (46). 3°. Сокращенный способ проверки аргументов (49).

§ *6. Нормальные формы* 52
1°. Составление формул по заданным таблицам истнинности (52). 2°. Нормальные формы. Приведение формул к совершенным нормальным формам с помощью равносильных преобразований (54). 3°. Получение следствий из данных посылок (58).

§ *7. Переключательные схемы* 61
1°. Описание переключательных схем с помощью формул логики высказываннй (61). 2°. Анализ, упрощение и синтез переключательиых схем (63).

§ *8. Предикаты и высказывательные формы* 66
1°. Недостаточность логики высказываний (66). 2°. Предикаты и способы их задания (67). 3°. Множество истин-

ности предиката (72). 4°. Равносильность высказывательных форм (74). 5°. Логические операции и операции над множествами (76). °6. Следование и включение (82).

§ 9. Свойства и отношения 85

1°. Свойства как одиоместиые предикаты (85). 2°. Классификация (86). 3°. Отиошеиия как многоместные преднкаты (88). 4°. Свойства бинариых отношенний (89). 5°. Отношения эквивалентиости и отношения порядка (92).

§ 10. Кванторы 94

1°. Кванторы общности и существования (94). 2°. Квантификация многоместных высказывательных форм (97). 3°. Отрнцание предложений с кванторами (100). 4°. Численные кванторы (102). 5°. Снмволическая запись определений и теорем (104).

§ 11. Формулы логики предикатов 106

Ответы, указания, решения 112

Использованная литература 123

Предметный указатель 124

Инна Львовна Никольская

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Зав. редакцией литературы по физике и математике Е. С. Гридасова
Редактор А. М. Суходский
Младший редактор И. С. Соколовская
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Художник В. И. Казакова
Технический редактор Т. А. Новикова
Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 3207

Изд. № ФМ-697. Сдано в набор 19.03.81. Подп. в печать 13.07.81.
Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бум. тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая.
Объем 6,72 усл. печ. л. 6,93 усл. кр.-отт. Уч.-изд. л. 7,65. Тираж 40 000 экз.
Зак. № 696. Цена 25 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.

Владимирская типография «Союзполиграфпрома»
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли

600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7